ÁLGEBRAS DE LIE SOLÚVEIS E NILPOTENTES

Cristiane Menegante da Silva¹; Otávio José Neto T. N. Santos²

UEMS, 79750-000, Nova Andradina-MS.

¹ bolsista UEMS, cris_mat2006@hotmail.com ; ² Orientador, ojneto@uems.br.

Resumo: As álgebras de Lie surgiram com Sophus Lie na década de 1870, dentro de seu programa de estender, às equações diferenciais, a teoria de Galois para equações algébricas. As idéias de Lie evoluíram para a Teoria de Lie, como é conhecida atualmente. A Teoria de Lie se ocupa do estudo das álgebras e grupos de Lie. Atualmente esta teoria é desenvolvida em centros de pesquisa em matemática e também é aplicada em outras ciências, como por exemplo a física. Neste trabalho foram pesquisadas as propriedades da álgebras de Lie, principalmente as características das álgebras de Lie solúveis e nilpotentes.

Palavras chave: Teoria de Lie. Série de Composição. Ideal.

Abstract: The Lie algebras arose with Sophus Lie in the decade of 1870, within its program to extend to the equations differentials, to the Galois theory of algebraic equations. Ideas Lie developed the theory of Lie, as it is known today. The Theory of Lie is dealing with the study of groups and Lie algebras. Today this theory is developed in research centers in mathematics and is also applied in other sciences, such as the physics. In this work were investigated the properties of Lie algebras, especially the characteristics of the algebras of Lie soluble and nilpotent.

Key words: Lie Theory. Composition Series. Ideal.

1 Introdução

As álgebras de Lie surgiram com Sophus Lie na década de 1870, dentro de seu programa de estender, às equações diferenciais, a teoria de Galois para equações algébricas. A idéia de Lie, de olhar os grupos de transformações como sendo constituídos por grupos a uma parâmetro, obtidos por soluções de equações diferenciais ordinárias, foi crucial como ponto de partida e para o desenvolvimento da imensa teoria construída desde então. As álgebras de Lie aparecem como objetos infinitesimais associados aos grupos de transformações como o colchete da álgebra correspondendo ao comutador do grupo. Um exemplo típico é o de um grupo de transformações lineares inversíveis: exponenciais dos elementos de uma álgebra de Lie de matrizes foram um grupo de Lie.

O termo “álgebra de Lie” foi popularizado a partir da década de 1920 com Hermann Weyl, em substituição ao “grupo infinitesimal” que se utilizava desde os tempos de Lie.

Os “grupos infinitesimais” foram considerados, a princípio, como objetos concretos associados a grupos de transformações. Um dos programas de Lie era o de classificar os grupos de transformações agindo num determinado espaço. Deve-se a Wilhelm Killing a idéia de dividir esse problema em dois: o de classificar o objeto abstrato que corresponde à álgebra de Lie e posteriormente analisar as ações dos grupos correspondentes, mais detalhes sobre este assunto pode ser encontrado em [3].

Atualmente, no Brasil, existem diversos programas de pós-graduação em matemática, como por exemplo, o da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e o da Universidade Estadual de Maringá (UEM), pesquisando propriedades dos grupos e álgebras de Lie, aja visto a descoberta de poderosas ferramentas aplicáveis na Teoria de Grupos [7] em Sistemas Alternantes [5]. Recentemente, como podemos ver nos trabalhos [1], [2] e [4] de Andrada, Barberis, Dotti, Fino, San Martin e Licurgo Santos, muitos e importantes resultados foram alcançados nos estudos das álgebras e grupos de Lie solúveis e nilpotentes.

O objetivo deste trabalho é estudar os conceitos e demonstrar os resultados mais relevantes envolvendo as álgebras de Lie nilpotentes e solúveis.

2 Conceitos Básicos

Esta é uma seção introdutória, formada em sua maior parte pelas definições dos conceitos que formam a linguagem básica da Teoria das Álgebras de Lie. Esses conceitos servem de base para o entendimento das álgebras de Lie solúveis e nilpotentes.

Definição 2.1 *Uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto, chamado de colchete ou comutador*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. *é bilinear;*
2. *é anti-simétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*
3. *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$;*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *abeliana* se $[X, Y] = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Como consequência direta da definição de álgebra de Lie, segue o seguinte resultado.

Proposição 2.2 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, então para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$;
2. $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$;
3. $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$.

Demonstração. Seja $X + Y \in \mathfrak{g}$, pela anti-simetria

$$\begin{aligned} [X + Y, X + Y] = 0 &\Rightarrow [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] = 0 \\ &\Rightarrow [X, Y] + [Y, X] = 0 \\ &\Rightarrow [X, Y] = -[Y, X] \end{aligned}$$

isto mostra (1). Para (2) e (3) basta aplicar (1) e a identidade de Jacobi. ■

Em geral, uma álgebra é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto, isto é, uma aplicação de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ a valores em $\mathfrak{g}$. Qualquer aplicação deste tipo que mereça o nome de produto deve ser bilinear. A anti-simetria e a identidade de Jacobi são características das álgebras de Lie. Outros tipos de álgebras tem outros tipos de propriedades que as definem. Existem por exemplo, as *álgebras associativas*, para as quais a propriedade adicional é $x(yz) = (xy)z$. Aqui convém observar que o colchete de Lie não é, em geral, associativo, pois em qualquer circunstância $[[X, X], Y] = 0$ e no entanto $[X, [X, Y]]$ nem sempre se anula.

Definição 2.3 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.4 *Seja $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ o espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{k}$ que é o mesmo que o espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{k}$. O colchete é dado por:*

$$[X, Y] = XY - YX,$$

com X e Y matrizes. Muitas vezes estas álgebras serão indicadas por $\mathfrak{gl}(n)$ apenas, sem especificar o corpo quando este não for relevante. Da mesma forma, a álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial V será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

O exemplo acima se estende para espaços de transformações lineares de espaços vetoriais que não são de dimensão finita, como o colchete dado da mesma forma pelo comutador.

Um exemplo mais geral ainda é formado pela seguinte família de álgebras de Lie.

Exemplo 2.5 *Álgebras de Lie provenientes de álgebras associativas. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra associativa e em $\mathfrak{A}$ defina o colchete pelo comutador*

$$[x, y] = xy - yx \quad x, y \in \mathfrak{A}$$

Este colchete define em $\mathfrak{A}$ uma estrutura de álgebra de Lie.

Exemplo 2.6 *O conjunto $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) : \text{tr}X = 0\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.*

De fato, sejam $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ matrizes tais que $\text{tr}A = 0$ e $\text{tr}B = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}[A, B] &= \text{tr}(AB - BA) \\ &= \text{tr}AB - \text{tr}BA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo $[A, B] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ e portanto $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ é uma subálgebra. Como no caso de $\mathfrak{gl}(n)$, muitas vezes se denotará estas álgebras apenas por $\mathfrak{sl}(n)$.

2.1 Álgebras de Lie de dimensão 1 e 2

Proposição 2.7 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana.*

Demonstração. *Seja Z uma base de $\mathfrak{g}$. Se $X, Y \in \mathfrak{g}$, então existem α e β tais que $X = \alpha Z$ e $Y = \beta Z$, assim*

$$[X, Y] = [\alpha Z, \beta Z] = \alpha\beta[Z, Z] = \alpha\beta 0 = 0.$$

Portanto $\mathfrak{g}$ é abeliana. ■

A proposição acima, caracteriza as álgebras de Lie unidimensionais. O próximo resultado caracteriza as álgebras de Lie de dimensão 2.

Proposição 2.8 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Se $\dim \mathfrak{g} = 2$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana ou existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que*

$$[X, Y] = Y.$$

Consequentemente, o colchete de dois elementos quaisquer de $\mathfrak{g}$ é dado por

$$[aX + bY, cX + dY] = (ad - bc)[X, Y] = (ad - bc)Y.$$

Demonstração. *De fato, suponha que $\mathfrak{g}$ não seja abeliana e tome uma base $\{X', Y'\}$ de $\mathfrak{g}$. Então $[X', Y'] \neq 0$, pois caso contrário $\mathfrak{g}$ seria abeliana. Seja $Y'' = [X', Y']$, e escolha X'' tal que $\{X'', Y''\}$ seja base de $\mathfrak{g}$. Então $X'' = aX' + bY'$; $Y'' = cX' + dY'$ e*

$$[X'', Y''] = \alpha Y''$$

com $\alpha \neq 0$ (pois X'', Y'' é base e daí que se $\alpha = 0$ a álgebra seria abeliana). Os elementos $X = \frac{1}{\alpha} X''$ e $Y = Y''$ formam a base requerida. ■

3 Generalidades algébricas

As generalidades algébricas, a que nos referimos são as noções de morfismo, quociente e produto. Essas noções fazem sentido e funcionam da mesma forma para uma grande variedade de estruturas algébricas e serão catalogadas, a seguir, para as álgebras de Lie.

Definição 3.1 Uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (com $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie) é um:

- (1) homomorfismo se $\psi [X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$;
- (2) isomorfismo se for um homomorfismo inversível;
- (3) automorfismo se é um isomorfismo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

Duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas se existe um isomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$.

Segue da definição acima que os homomorfismos entre álgebras abelianas são as transformações lineares. Além disso, duas álgebras abelianas são isomorfas se e somente se elas tem a mesma dimensão. Se $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é homomorfismo e $\mathfrak{h}$ é abeliana então $\ker \psi$ contém todos os elementos da forma $[X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, pois $\psi [X, Y] = [\psi X, \psi Y] = 0$.

Duas álgebras de Lie de mesma dimensão podem não ser isomorfas. De fato, sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}_1$ álgebras de Lie de dimensão 2 em que, $\mathfrak{g}$ é abeliana e $\mathfrak{g}_1$ não é abeliana.

Suponhamos que $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1$ seja um isomorfismo. Seja $\{A, B\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ se $X = T(A)$ e $Y = T(B)$, então $\{X, Y\}$ é uma base de $\mathfrak{g}_1$. Por contradição suponhamos que $[X, Y] = 0$, como $\mathfrak{g}_1$ não é abeliana existem $Z_1 = \alpha X + \beta_1 Y, Z_2 = \alpha_2 X + \beta_2 Y \in \mathfrak{g}_1$, tais que $[Z_1, Z_2] \neq 0$. Mas por outro lado,

$$[Z_1, Z_2] = [\alpha X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y] = 0.$$

Portanto $[X, Y] \neq 0$.

Sendo ϕ um isomorfismo, $\phi[A, B] = [\phi(A), \phi(B)] = [X, Y]$ mas, $\phi[A, B] = \phi(0) = 0$. Por outro lado, $[\phi(A), \phi(B)] = [X, Y] \neq 0$. Portanto ϕ não é um isomorfismo.

Uma forma de verificar que álgebras de Lie de dimensão finita são isomorfas é através do colchete entre elementos de suas bases. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Tomando dois elementos X_i, X_j desta base, o colchete entre eles $[X_i, X_j]$ pode ser escrito como combinação linear

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

Os coeficientes c_{ij}^k são denominados constantes de estrutura da álgebra em relação á base. Estas constantes determinam a álgebra, a menos de isomorfismo. De fato, seja $\mathfrak{h}$ uma álgebra

de Lie com uma base $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ com as mesmas constantes de estrutura c_{ij}^k que $\mathfrak{g}$. Seja também a transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\psi(X_i) = Y_i$. Então.

$$\psi[X, Y] = \sum_{ijk} a^i b^j c_{ij}^k \psi(X_k) = \sum_{ij} a^i b^j [Y_i, Y_j] = [\psi(X), \psi(Y)]$$

onde a^i e b^j ; $i, j = 1, \dots, n$ são as coordenadas de X e Y respectivamente em relação a base de $\mathfrak{g}$. Isto mostra que ψ é um isomorfismo e, portanto, que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas.

As constantes de estruturas satisfazem as igualdades para toda terna i, j, k :

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad (1)$$

$$\sum_{l,m} (c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m) = 0 \quad (2)$$

com a primeira delas devido a anti-simetria do colchete e a segunda a identidade de Jacobi. Reciprocamente, pode-se verificar que dadas as constantes c_{ij}^k satisfazendo essas duas igualdades, elas são as constantes de estrutura de uma álgebra de Lie, isto é, partindo de um base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de um espaço vetorial, definindo $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ e estendendo por bilinearidade, obtém-se uma álgebra de Lie no espaço vetorial cujas constantes de estrutura são c_{ij}^k .

Estes fatos dizem que para conhecermos uma álgebra de Lie, a menos de isomorfismo, é suficiente conhecer os colchetes dos elementos de uma base.

A partir daí, da Proposição 2.8, segue que:

Proposição 3.2 *A menos de isomorfismo, existem apenas duas álgebras de Lie de dimensão dois. Uma delas é a abeliana e a outra é a que admite uma base $\{X, Y\}$ tal que $[X, Y] = Y$.*

Definição 3.3 *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma ideal, se para todo $Y \in \mathfrak{h}$ e $X \in \mathfrak{g}$ tem-se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, isto é,*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}$$

É claro que todo ideal é subálgebra. Nem toda subálgebra, no entanto, é ideal. Por exemplo, o subespaço de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é uma subálgebra por ser unidimensional. Não é, porém, um ideal pois

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As propriedades da soma e da intersecção de ideais e subálgebras estão catalogadas no seguinte teorema.

Teorema 3.4 *Sejam $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ subespaços de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

- (i) *Se $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são ideais, então $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ e $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ são ideais;*
- (ii) *Se $\mathfrak{h}_1$ é subálgebra e $\mathfrak{h}_2$ ideal, então $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ e $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ são subálgebras;*
- (iii) *Se $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ são subálgebras, então $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é uma subálgebra;*

Demonstração. (i) Sejam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, queremos mostrar que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é um ideal, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$. Temos que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 = \{X_1 + X_2; X_1 \in \mathfrak{h}_1 \text{ e } X_2 \in \mathfrak{h}_2\}$, então $Y = Y_1 + Y_2$, com $Y_1 \in \mathfrak{h}_1$ e $Y_2 \in \mathfrak{h}_2$, assim o colchete é dado por:

$$[X, Y] = [X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2.$$

Sejam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, queremos mostrar que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é um ideal, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Temos que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \{X \in \mathfrak{h}_1 \text{ e } X \in \mathfrak{h}_2\}$, então $Y \in \mathfrak{h}_1$ e $Y \in \mathfrak{h}_2$, assim o colchete $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1$ e $[X, Y] \in \mathfrak{h}_2$, logo $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ e portanto $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é um ideal.

Os itens (ii) e (iii) são demonstrados de maneira análoga. ■

Teorema 3.5 *Seja $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo. Então*

- (1) *$\ker \psi$ é um ideal;*
- (2) *$\text{im}(\psi)$ é uma subálgebra.*

Demonstração. (1) Sejam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \ker \psi$, queremos mostrar que $[X, Y] \in \ker \psi$. Temos que $\psi(Y) = 0$, assim

$$\psi [X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)] = [\psi(X), 0] = 0.$$

Portanto $\ker \psi$ é um ideal.

(2) Sejam $Y_1, Y_2 \in \text{im}(\psi)$, então existem $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ tal que $\psi(X_1) = Y_1$ e $\psi(X_2) = Y_2$. Queremos mostrar que $[Y_1, Y_2] \in \text{im}(\psi)$, o colchete é dado por:

$$[Y_1, Y_2] = [\psi(X_1), \psi(X_2)] = \psi [X_1, X_2].$$

Portanto $\text{im}(\psi)$ é uma subálgebra. ■

Definição 3.6 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. O centro de $\mathfrak{g}$ é o subconjunto*

$$z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

O centro de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um ideal. De fato, como $[O, Y] = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, logo $O \in z(\mathfrak{g})$. Se $Y \in \mathfrak{g}$ e $X \in z(\mathfrak{g})$, então $[X, Y] = 0 \in z(\mathfrak{g})$.

Exemplo 3.7 *O centro da álgebra de Lie não abeliana de dimensão dois é trivial.*

Definição 3.8 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. No espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, definimos

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$$

onde $\overline{X}$ denota a classe $X + \mathfrak{h}$.

Teorema 3.9 Seja $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo. Então, $\frac{\mathfrak{g}}{\ker \psi} \approx im(\psi)$

Demonstração. Definimos $f : \mathfrak{g}/\ker \psi \rightarrow im(\psi)$ por

$$f(\overline{X}) = \psi(X).$$

Sejam $\overline{A}, \overline{B} \in \mathfrak{g}/\ker \psi$, suponhamos que

$$f(\overline{A}) = f(\overline{B}) \Leftrightarrow \psi(A) = \psi(B) \Leftrightarrow \psi(A) - \psi(B) = 0 \Leftrightarrow \psi(A - B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$$

isto mostra que f está bem definida e é injetora.

Além disso, temos que

$$f[\overline{X}, \overline{Y}] = f\overline{[X, Y]} = \psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)] = [f(\overline{X}), f(\overline{Y})],$$

assim f é um homomorfismo. Como $f(\overline{X}) = \psi(X)$, então para todo $Y \in im(\psi)$ existe X tal que $\psi(X) = Y$, com isso mostramos que f é sobrejetora.

Portanto, portanto f é um isomorfismo. ■

Teorema 3.10 Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideais de $\mathfrak{g}$. Então

$$\frac{(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)}{\mathfrak{h}_1} \approx \frac{\mathfrak{h}_2}{(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)}$$

Demonstração. Definimos uma aplicação linear $\psi : \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \rightarrow \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ por

$$\psi(X_1 + X_2) = \overline{X_2}$$

Vamos mostrar que: (i) $\ker \psi = \mathfrak{h}_1$ e (ii) $\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = im(\psi)$.

(i) Sejam $X_1 + X_2 \in \ker \psi$, queremos mostrar que $X_1 + X_2 \in \mathfrak{h}_1$. Como $X_1 + X_2 \in \ker \psi$, $\psi(X_1 + X_2) = \overline{0}$, mas por definição $\psi(X_1 + X_2) = \overline{X_2}$. Logo $\overline{X_2} = \overline{0}$, ou seja, $X_2 \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$, isto prova que $X_1 + X_2 \in \mathfrak{h}_1$.

Temos que

$$\psi(X_1 + X_2) = \overline{0} \Rightarrow \overline{X_2} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{X_2} \in \mathfrak{h}_1,$$

por outro lado, seja $X_1 + 0 \in \mathfrak{h}_1$, queremos mostrar que $X_1 + 0 \in \ker \psi$. Temos que $\psi(X_1 + 0) = \overline{0}$, logo $X_1 + 0 \in \ker \psi$. Portanto $\ker \psi = \mathfrak{h}_1$.

(ii) Temos que $\frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} = \{X_2 + \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \mid X_2 \in \mathfrak{h}_2\}$. Temos também que $\overline{X}_2$ representa a seguinte classe lateral $\overline{X}_2 = X_2 + (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$, logo $\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = im(\psi)$.

Resta mostrar que ψ é um homomorfismo, isto é, $\psi [X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, então $X = X_1 + X_2$ e $Y = Y_1 + Y_2$, assim

$$\begin{aligned}
 \psi [X, Y] &= \psi [X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] \\
 &= \psi ([X_1, Y_1] + [X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] + [X_2, Y_2]) \\
 &= \psi [X_1, Y_1] + \psi [X_1, Y_2] + \psi [X_2, Y_1] + \psi [X_2, Y_2] \\
 &= \psi [X_2, Y_2], \text{ pois } [X_1, Y_i] \in \mathfrak{h}_1 = \ker \psi \\
 &= \overline{[X_2, Y_2]} \\
 &= [\overline{X}_2, \overline{Y}_2] \\
 &= [\psi(X_1 + X_2), \psi(Y_1 + Y_2)] \\
 &= [\psi(X), \psi(Y)]
 \end{aligned}$$

Portanto pelo Teorema 3.9, $\frac{(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)}{\mathfrak{h}_1} \approx \frac{\mathfrak{h}_2}{(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)}$. ■

4 Séries de composição

Tomando $\mathfrak{g}$ como sendo uma álgebra de Lie, para dois subconjuntos A e B de $\mathfrak{g}$ será usado a notação $[A, B]$ para indicar o subespaço gerado por todos os colchetes $[X, Y]$, com $X \in A$ e $Y \in B$, ou seja

$$[A, B] = \{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Define-se por indução os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g} \\
 \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
 \mathfrak{g}'' &= [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].
 \end{aligned}$$

É fácil verificar que, uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é abeliana se e somente se $\mathfrak{g}' = 0$.

Proposição 4.1 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então $\mathfrak{g}^{(k)}$ é ideal de $\mathfrak{g}$ para todo $k \geq 0$. Em particular, $\mathfrak{g}^{(k)}$ é subálgebra e, portanto, $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ para $k \geq 0$. Vamos usar indução sobre k . Temos $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ que é um ideal. Assumindo que $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ seja ideal, sejam

$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Podemos escrever Y como

$$Y = \sum_i [Z_i, W_i]$$

com $Z_i, W_i \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$. Pela identidade de Jacobi temos

$$[X, Y] = \sum_i [X, [Z_i, W_i]] = \sum_i [[X, Z_i], W_i] + [Z_i, [X, W_i]]$$

esta última soma está em $\mathfrak{g}^{(k)}$, pois cada fator dos colchetes está em $\mathfrak{g}^{(k-1)}$. Portanto $\mathfrak{g}^{(k)}$ é ideal. ■

Essa sequência de ideais é conhecida por *série derivada de $\mathfrak{g}$* e suas componentes são álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 4.2 *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra bidimensional não abeliana. Então $\mathfrak{g}'$ é o espaço gerado por Y e $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, se $k \geq 2$.*

Exemplo 4.3 *Para a álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ e portanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$, para todo $k \geq 0$.*

Proposição 4.4 *O quociente $\frac{\mathfrak{g}^{(k-1)}}{\mathfrak{g}^{(k)}}$ é uma álgebra abeliana.*

Demonstração. Sejam $\bar{X}$ e $\bar{Y} \in \frac{\mathfrak{g}^{(k-1)}}{\mathfrak{g}^{(k)}}$. Queremos mostrar que $\frac{\mathfrak{g}^{(k-1)}}{\mathfrak{g}^{(k)}}$ é uma álgebra abeliana, isto é, $[\bar{X}, \bar{Y}] = 0$. Temos que $\bar{X} = X + \mathfrak{g}^{(k)}$; $\bar{Y} = Y + \mathfrak{g}^{(k)}$, com $X, Y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$. Como $X, Y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, então $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Temos que

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]} = [X, Y] + \mathfrak{g}^{(k)} = \bar{0}.$$

Portanto o quociente $\frac{\mathfrak{g}^{(k-1)}}{\mathfrak{g}^{(k)}}$ é uma álgebra abeliana. ■

Proposição 4.5 *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie.*

- (1) *Se $\mathfrak{h}$ um ideal e $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ o homomorfismo canônico, então $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = \left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\right)^{(k)}$.*
- (2) *Se $\mathfrak{h}$ é subálgebra, então $\mathfrak{h}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$.*

Demonstração. (1) Vamos usar indução sobre k . Para $k = 0$ temos $\pi(\mathfrak{g}^{(0)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(0)}$. Assumindo que a igualdade seja válida para $k - 1$, temos:

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^{(k)}) &= \pi[(\mathfrak{g})^{(k-1)}, (\mathfrak{g})^{(k-1)}] \\ &= [\pi(\mathfrak{g})^{(k-1)}, \pi(\mathfrak{g})^{(k-1)}] \\ &= [(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}, (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}] \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} \end{aligned}$$

(2) Vamos usar indução sobre k . Para $k = 0$ temos $(\mathfrak{h})^{(0)} \subset (\mathfrak{g})^{(0)}$, pois $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Vamos mostrar que o resultado é válido para $(\mathfrak{h})^{(k+1)}$, temos que:

$$(\mathfrak{h})^{(k+1)} = [(\mathfrak{h})^{(k)}, (\mathfrak{h})^{(k)}] = [(\mathfrak{g})^{(k)}, (\mathfrak{g})^{(k)}] \subset \mathfrak{g}^{(k+1)}.$$

■

A *série central descendente* da álgebra de lie $\mathfrak{g}$ é definida por indução, como

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] = \mathfrak{g}' \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] \\ \mathfrak{g}^{k+1} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \end{aligned}$$

Proposição 4.6 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então*

(1) $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$

(2) $\mathfrak{g}^k$ é o subespaço gerado por todos os possíveis produtos (colchetes) envolvendo k elementos de $\mathfrak{g}$.

Demonstração. (1) Para mostrar este resultado vamos usar indução sobre j . Para $j = 1$ a inclusão é a definição, isto é $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$. Assumindo que o resultado é válido para um j qualquer, vamos mostrar que vale para $j + 1$. Temos que

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{j+1}] &= [\mathfrak{g}^i, [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}]] \subset [[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j], \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j, [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]] \\ &\subset [\mathfrak{g}^{i+j}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+1}] \\ &\subset \mathfrak{g}^{i+j+1} \end{aligned}$$

(2) Queremos mostrar que $\mathfrak{g}^k$ é produto (colchete) de k elementos de $\mathfrak{g}$. Para isto vamos usar indução sobre k . Para $k = 1$ temos $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, assim $\mathfrak{g}^1$ é produto de um elemento de $\mathfrak{g}$. Agora suponhamos que o resultado seja válido para $k - 1$, isto é $\mathfrak{g}^{k-1}$ é colchete de $k - 1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Os elementos de $\mathfrak{g}^{k-1}$ são da forma $\sum_i Z_i$, com Z_i colchete de $k - 1$ elementos de $\mathfrak{g}$. Seja $X \in \mathfrak{g}^k$, então $X = \sum_i [Y_i, W_i]$ com $Y_i \in \mathfrak{g}$ e $W_i \in \mathfrak{g}^{k-1}$. Assim,

$$X = \sum_i [Y_i, \sum_j Z_j] = \sum_i \sum_j [Y_i, Z_j]$$

Disso segue que $\mathfrak{g}^k$ é gerado por colchetes com k elementos de $\mathfrak{g}$.

Por outro lado, seja $X \in \mathfrak{g}$ o colchete de k elementos de $\mathfrak{g}$, então $X = [X_1, X_2]$, com X_i produto de no máximo $k - 1$ elementos de $\mathfrak{g}$, isto implica, por indução, que $X_i \in \mathfrak{g}^{k-1} \in \mathfrak{g}$.

Logo $X \in \mathfrak{g}^k$. ■

Os seguintes fatos decorrem da caracterização de $\mathfrak{g}$ dada nesta proposição.

- (1) $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, pois um produto de $k + 1$ elementos também é um produto de k elementos.
- (2) $\mathfrak{g}^k$ é um ideal para $k \geq 1$, pois $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. De onde se conclui que a série central descendente é, de fato, descendente,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}^k \supset \dots$$

Exemplo 4.7 Para a álgebra não abeliana $\mathfrak{g}$ de dimensão dois, com base $\{X, Y\}$ com $[X, Y] = Y$, $\mathfrak{g}^k$ é o subespaço gerado por $\{Y\}$, para todo $k \geq 2$.

Assim como para a série derivada, os quocientes sucessivos dos elementos da série são abelianos e a série central descendente da imagem sobrejetora de uma álgebra coincide com a imagem da série central descendente da álgebra. Estes fatos estão contidos na proposição seguinte.

Proposição 4.8 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então

- (1) O quociente $\frac{\mathfrak{g}^k}{\mathfrak{g}^{k+1}}$ é uma álgebra abeliana.
- (2) Se $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é o homomorfismo canônico, $\pi(\mathfrak{g}^k) = \left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\right)^k$.

Demonstração. (1) Sejam $\bar{X}$ e $\bar{Y} \in \frac{\mathfrak{g}^k}{\mathfrak{g}^{k+1}}$. Queremos mostrar que $\frac{\mathfrak{g}^k}{\mathfrak{g}^{k+1}}$ é uma álgebra abeliana isto é $[\bar{X}, \bar{Y}] = 0$. Temos que $\bar{X} = X + \mathfrak{g}^{k+1}$; $\bar{Y} = Y + \mathfrak{g}^{k+1}$, com $X, Y \in \mathfrak{g}^k$. Como $X, Y \in \mathfrak{g}^k$, então $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{k+1}$. Temos que

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = [\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y] + \mathfrak{g}^{k+1} = \bar{0}.$$

Portanto o quociente $\frac{\mathfrak{g}^k}{\mathfrak{g}^{k+1}}$ é uma álgebra abeliana.

(2) Vamos usar indução sobre k . Para $k = 1$ temos $\pi(\mathfrak{g}^{(1)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(1)}$. Assumindo que a igualdade seja válida para $k - 1$, temos:

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^k) &= \pi[\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}^{k-1})] \\ &= [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g}^{k-1})] \\ &= [(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{k-1}] \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k. \end{aligned}$$

■

A afirmação seguinte fornece uma comparação entre a série derivada e a série central descendente.

Proposição 4.9 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. então $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Demonstração. Vamos usar indução sobre k . Suponhamos que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$, então,

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] = \mathfrak{g}^{k+2}.$$

A inclusão é verdadeira pois por definição $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$ por hipótese de indução.

■

A proposição acima mostra que a série derivada decresce mais rápido que a série central descendente.

5 Álgebras de Lie solúveis e Nilpotentes

Definição 5.1 *Uma álgebra é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Exemplo 5.2 (1) *As álgebras abelianas são solúveis pois para essa classe de álgebras $\mathfrak{g}' = 0$.*

(2) *Se $\dim \mathfrak{g} = 2$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel independentemente de $\mathfrak{g}$ ser ou não abeliana. Isso porque existem apenas duas classes de álgebras bidimensionais. As abelianas são solúveis e as não abelianas tem álgebra derivada de dimensão um e, portanto a segunda derivada se anula, exemplo 4.2.*

(3) *Pelo exemplo 4.3 a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ não é solúvel.*

Subálgebras e imagens homomórficas de álgebras solúveis são também solúveis. Esta afirmação está garantida pela proposição seguinte.

Proposição 5.3 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. (1) Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é subálgebra, então $\mathfrak{h}$ também é solúvel.*

(2) *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ também é solúvel.*

Demonstração. (1) *As álgebras sucessivas de $\mathfrak{h}$ estão contidas nas correspondentes álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$. Portanto $\mathfrak{h}$ é solúvel se $\mathfrak{g}$ o for.*

(2) *Como $\mathfrak{g}$ é solúvel, então existe k_0 tal que $\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$, temos que,*

$$\pi(\mathfrak{g}^{(k_0)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_0)} = 0$$

Portanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel. ■

Um caso particular da primeira afirmação desta proposição é que ideais e álgebras solúveis são também solúveis. Como a segunda afirmação diz que os quocientes por ideais são também solúveis, a próxima proposição complementa a anterior ao dizer que a álgebra propriamente dita é solúvel se algum de seus quociente juntamente com o seu núcleo é solúvel.

Lema 5.4 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie então $\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)}$.*

Demonstração. Vamos mostrar este resultado usando indução sobre k_2 . Suponhamos que o resultado seja válido para um k_2 qualquer isto é:

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)}$$

Vamos mostrar que é válido para $k_2 = k_2 + 1$. Temos que

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2+1)} = [\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)}, \mathfrak{g}^{(k_1+k_2)}] = [(\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)}, (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)}] = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2+1)}.$$

■

Proposição 5.5 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um ideal. Suponha que tanto $\mathfrak{h}$ quanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sejam solúveis. Então, $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Demonstração. Seja k_1 tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = 0$. Por $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$, tem-se $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = 0$. Isto significa que $\mathfrak{g}^{(k_1)} \subset \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é solúvel, existe k_2 tal que $\mathfrak{h}^{(k_2)} = 0$, Daí segue que,

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} \subset \mathfrak{h}^{(k_2)} = 0$$

Portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel. ■

Definição 5.6 *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = 0$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e portanto, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Exemplo 5.7 *As álgebras abelianas são nilpotentes, pois para esta classe de álgebras, $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.*

Da mesma forma que para as álgebras solúveis, subálgebras e quocientes de álgebras nilpotentes são também nilpotentes.

Proposição 5.8 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente. Então*

- (1) *Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é subálgebra então $\mathfrak{h}$ é nilpotente.*
- (2) *Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente.*

Demonstração. (1) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente, então existe k_0 tal que $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$. Temos que

$$\mathfrak{h}^{k_0} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{k_0-1}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k_0-1}] = \mathfrak{g}^{k_0} = 0$$

Portanto $\mathfrak{h}$ é nilpotente.

(2) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e ϕ o homomorfismo canônico. Como $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então existe k_0 tal que $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$. Assim temos,

$$\phi(\mathfrak{g}^{(k_0)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_0)} = 0$$

Portanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente. ■

As álgebras nilpotentes são solúveis pois $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. No entanto, nem toda álgebra solúvel é nilpotente, por exemplo, se $\mathfrak{g}$ denota a álgebra abeliana de dimensão 2, então $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^2 \neq 0$ se $k \geq 2$, porém $\mathfrak{g}'' = 0$. Além disso, para esta álgebra $z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, ou seja o centro de uma álgebra de Lie solúvel pode ser trivial o que não acontece com as álgebras nilpotentes, como mostra o próximo resultado.

Proposição 5.9 *O centro de uma álgebra de Lie nilpotente não é trivial.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente, então existe um inteiro positivo k_0 tal que $\mathfrak{g}^{k_0} \neq 0$ e $\mathfrak{g}^{k_0+1} = 0$. Então, $\mathfrak{g}^{k_0} \subset z(\mathfrak{g})$, pois $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k_0}] = \mathfrak{g}^{k_0+1} = 0$ ■

Outra diferença entre as álgebras nilpotentes e as solúveis está na possibilidade de reconstruir a propriedade de solubilidade a partir de um quociente e do núcleo desse quociente. O mesmo não ocorre com as álgebras nilpotentes. Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é ideal e ambos $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ são nilpotentes, então $\mathfrak{g}$ é solúvel mas não necessariamente nilpotente. Um exemplo é novamente a álgebra não abeliana bidimensional com $[X, Y] = Y$. O subespaço $\mathfrak{h}$ gerado por Y é ideal e é nilpotente por ser de dimensão um. O mesmo ocorre com $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. No entanto, $\mathfrak{g}$ não é nilpotente.

Agradecimentos

Agradecemos a UEMS pelo apoio financeiro durante a execução deste projeto.

Referências

- [1] Andrada, A., Barberis, M. L., Dotti, I. G. & Ovando, G. P. 2005. Product Structures on Four Dimensional Solvable Lie álgebras. **Homology, Homotopy and Applications**, v.7, p. 9-37.
- [2] Barberis, M. L. & Dotti, I. 2004. Abelian Complex Structures on Solvable Lie Álgebras. **J. Lie Theory**, v.14, p. 25-34.
- [3] Hawkins, T. 1982. Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras. **Archive for history of exact sciences**, v.26, p. 127-192.
- [4] Licurgo Santos, E. C. & San Martin, L. A. B. 2005. Lie algebras with complex structures having nilpotent eigenspaces. **Relatório de pesquisa**. Disponível em *http : //www1.ime.unicamp.br/rel_pesq/2005/ps/rp41 - 05.pdf* (último acesso em 19/08/2009).
- [5] Nascimento, R. P. **Álgebras de Lie e aplicações à sistemas alternantes**. 2005. 58f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) Universidade Estadual Paulista - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
- [6] San Martin, L. A. B. 1999. **Álgebras de Lie**. Campinas: Editora da Unicamp, p. 450.
- [7] Santos, O. J. N. T. N. **Grupos finitos admitindo automorfismos livres de pontos fixos**. 2005. 96f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Estadual de Maringá.