ENEPEX
ENCONTRO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO
8° ENEPE UFGD • 5° EPEX UEMS

TÓPICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Junior Rodrigues Ribeiro[1]; Cosme Eustaquio Rubio Mercedes[2]; Vando Narciso[3]

UEMS/CCMAT – Caixa Postal 351, 79.804-970 – Dourados – MS. E-mail: juniorribeiro_2011@hotmail.com; cosme@uems.br; vnarciso@uems.br. [1]Bolsista do PICME/CNPq-CAPES pela UEM. [2]Orientador, professor Dr. da UEMS. [3]Coautor, professor Dr. da UEMS.

RESUMO

O presente texto se refere à conclusão do primeiro ano do Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME, financiado pelo CNPq. É apresentado de forma resumida o trabalho desenvolvido nesse período. Foram estudados a conceituação de Equação Diferencial Ordinária, alguns métodos de resolução dessas equações e as demonstrações de alguns deles, a solução de Problemas de Valor Inicial, o método de Bernoulli, sistemas de duas equações diferenciais de primeira ordem homogêneas com coeficientes constantes, seus autovalores e autovetores. Por fim foi dada uma introdução à Equação da Onda Infinita, pelo método de d'Alembert.

Palavras-chave: Equação da onda. Princípio de d'Alembert. Pequenas oscilações transversais.

INTRODUÇÃO

Muitos dos princípios, ou leis que regem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação do calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, ou o aumento ou diminuição de populações, entre muitos outros é necessário estudar equações diferenciais (ver [1], [2], [3], [4], [5] e [6]). Neste projeto foi proposto estudar as equações diferenciais sobre três aspectos, quantitativos, qualitativos e a aplicabilidade de seus resultados em modelos matemáticos. A parte quantitativa concerne ao estudo de suas formas e métodos algébricos e numéricos de resoluções, a teoria qualitativa diz respeito à descrição da configuração global das soluções e o efeito de perturbações das condições iniciais. No que se refere à aplicabilidade, estudamos modelos lineares envolvendo a dinâmica de crescimento populacional. Também foi estudada a equação unidimensional da onda finita pelo método de d'Alembert, o foco desta apresentação.

DESENVOLVIMENTO

Os relatos do trabalho se referem ao estudo desenvolvido durante o período de um ano, em encontros semanais, realizado por meio de pesquisas bibliográficas e seminários, onde o orientando estudou individualmente os tópicos escolhidos pelo orientador constantes no projeto para apresentar a evolução do seu trabalho e os resultados de seu estudo no encontro seguinte, quando também esclarecia eventuais dúvidas. Esse trabalho consistiu em aprender a calcular as soluções das equações e interpretar suas soluções e demonstrar a validade dos métodos utilizados para esse cálculo, as demonstrações. É importante para a formação do orientando, já que ele aprendeu a utilizar rigor matemático na apresentação dos seus resultados e estudou tópicos mais avançados, que não são contemplados na graduação.

Uma corda, entende-se, é um fio flexível e de pequena espessura. Suponha que o eixo dos x de um sistema cartesiano represente a corda em seu estado de equilíbrio, com sua origem em 0 do plano $\mathbb{R}^2$. Será estudada a equação de oscilações transversais, isto é, onde os pontos da corda em movimento percorram um plano que contém o eixo dos x e que suas trajetórias sejam perpendiculares a ele.

> "Representa-se por $u(x; t)$ o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t a partir de sua posição de equilíbrio. Para fundamentar os procedimentos seguintes, faz-se as seguintes considerações:
>
> (a) Todas as forças de atrito, tanto internas como externas, não serão consideradas.
>
> (b) A intensidade das forças gravitacionais é pequena quando comparada com as tensões da corda.
>
> (c) As amplitudes u(x,t) das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos, quando comparados com a unidade." (MEDEIROS; ANDRADE, 1978.)

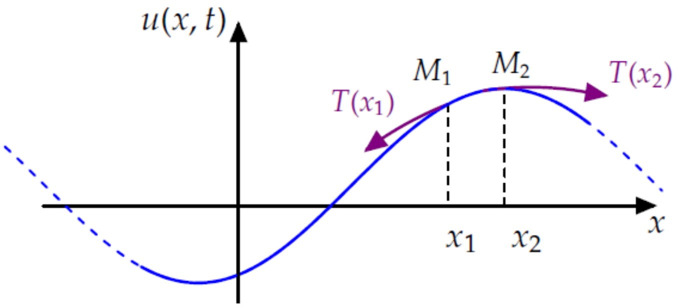

Figura 1: Movimento transversal da corda e as forças de tensão $T(x)$.

É possível mostrar que a tensão *T* pode ser tomada como independente de *x*, isto é, considerá-la igual à tensão da posição de equilíbrio para todo *x*. Levando em conta as considerações feitas, as forças atuando sobre o arco $\widehat{M_1 M_2}$ são as seguintes:

(a) as tensões em M_1 e M_2 tangenciais à corda;

(b) as forças externas se existirem;

(c) as forças de inércia.

Considerando que as forças externas e de inércia atuem também transversalmente sobre a corda, o arco $\widehat{M_1 M_2}$ não possui aceleração na direção do eixo *x*, a resultante das forças se anula. Sendo α o ângulo agudo que a direção de *T* faz com o eixo dos *x*, tem-se, no instante *t*:

$$T(x\_2\ )cos[\alpha(x\_2\ )] - T(x\_1\ )cos[\alpha(x\_1\ )] = 0 \tag{1}$$

Sendo pequenas oscilações, e lembrando a relação trigonométrica $1 + tg^2(x) = \sec^2(x)$ tem-se

$$\cos[\alpha(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2[\alpha(x)]}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1 \tag{2}$$

Isso implica que $T(x_2) \approx T(x_1)$; $\forall\ x_1$ e x_2 da corda. Logo, a força de tensão é a mesma para qualquer ponto da corda e em qualquer momento e será indicada como T_0. O Princípio de d'Alembert afirma que "*Num sistema material em movimento, as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram*". A equação de pequenas oscilações de uma corda será então deduzida como aplicação desse princípio.

(a) força resultante das tensões na direção *u*:

$$F_1 = T_0[sen[\alpha(x_2)] - sen[\alpha(x_1)] \tag{3}$$

$$F_1 = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx \tag{4}$$

(b) forças externas: seja *p(x,t)* a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, na direção u. Isso resulta em

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)\ dx \tag{5}$$

(c) forças de inércia: considere $\rho(x)$ a densidade linear da corda. A massa do segmento Δx é dada por $\rho(x)\Delta x$ e a força de inércia sobre esse segmento será

$$-\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6}$$

Logo, a força F_3 atuando sobre o arco $\widehat{M_1 M_2}$ será dada por

$$F_3 = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ dx \tag{7}$$

Por fim, do princípio de d'Alembert escreve-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) \right] dx = 0 \tag{8}$$

Se fizer $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho(x)}}$ e $F(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho(x)}$, simplifica-se essa equação para

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t). \tag{9}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse período de um ano foram aprofundados os conhecimentos em um ponto de vista teórico das equações diferenciais ordinárias ou edos, o que não ocorre num curso comum de Cálculo. Assim como foi dito, foram estudados vários métodos de resolução de edos e as demonstrações desses métodos, a resolução de problemas de valor inicial e suas interpretações e ainda a resolução de sistemas de equações lineares a coeficientes constantes, mostrando que os objetivos foram alcançados. Antes de chegar ao fim do período foi iniciado o estudo da equação da onda unidimensional que é uma equação diferencial parcial ou edp. Isso foi importante, porque o orientando tem projeto para o seu Trabalho de Conclusão de Curso um estudo sobre a equação da difusão unidimensional do calor, que também é uma edp. Enfim, o trabalho desenvolvido é de grande importância para a formação do orientando, já que possibilita uma ampliação da sua visão de mundo e também das demais áreas da Matemática e ainda incentivando estudos mais avançados na área.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq e CAPES, pela Bolsa PICME concedida. Ao apoio Assistencial da Universidade Estadual de Maringá, UEM-PR e Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, UEMS-MS, Unidade Universitária de Dourados-MS (polo).

REFERÊNCIAS

[1] ABUNAHMAN, Sérgio Antonio. **Equações diferenciais.** Rio de Janeiro: LTC, 1979.

[2] BOYCE,William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais ordinárias e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 1998.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo,** v. 1 e v. 4, 5a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[4] MEDEIROS, Luís Adauto.; ANDRADE, Nirzi G. de. **Iniciação às equações diferenciais parciais.** Rio de Janeiro: LTC, 1978.

[5] SANTOS, Reginaldo J. **Introdução às equações diferenciais ordinárias.** Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.

[6] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais,** v. 1. São Paulo: Makron Books, 2001.