POLINÔMIOS ORTOGONAIS CLÁSSICOS

Alex Starch Perlin[1]; Fábio Rodrigues Lucas[2];

[1] Estudante do Curso de Licenciatura em Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Nova Andradina; E-mail: Alex Starch Perlin**. BOLSISTA UEMS.**
[2] Professor(a) do curso de Licenciatura em Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Nova Andradina; E-mail: fabiorodrigues@uems.br

Matemática Aplicada

Resumo
Neste projeto buscamos a compreensão e ampliação dos nossos conhecimentos sobre Polinômios Ortogonais Clássicos. Inicialmente vamos estudar os polinômios ortogonais num caso geral, compreendendo algumas de suas características importantes para o entendimento do caso dos Polinômios Ortogonais Clássicos, e logo após tomar o início do estudo do caso dos Polinômios Ortogonais Clássicos. Para isso utilizamos a apostila “Polinômios Ortogonais e Similares Propriedades e Aplicações” de Eliana Xavier Linhares de Andrade e Cleonice Fátima Braccialida da UNESP de São José do Rio Preto, nela encontramos todos os tópicos que pretendemos estudar. O nosso trabalho se baseia basicamente no estudo e compreensão desse material, recorrendo a outros materiais se necessário. O estudo é individual, mas dirigido e acompanhado de perto pelo orientador, que está atento a qualquer dúvida, fornece o material e auxilia no aprendizado. Para avaliar o estudo são feitos seminários na sala de aula da UEMS.

Palavras-chave: Estudo. Polinômios. Ortogonais.

Introdução

Entre os polinômios associados à relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. Talvez como um efeito secundário da revolução do computador e o aumento de atividade na teoria da aproximação e análise numérica, o interesse em polinômios ortogonais foi revivido nos últimos anos. As aplicações de tais polinômios à Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a todo o momento, com aplicações importantes à física e à probabilidade e estatística e outros ramos da matemática.

As aplicações dos polinômios ortogonais associados às chamadas medidas clássicas, como as de Jacobi, Hermite e Laguerre, têm, particularmente, papel fundamental em muitos problemas das ciências e das engenharias.

Devido às muitas aplicações se tornou um assunto relevante e que merece um estudo aprofundado a fim de conhecer melhor suas propriedades e potencialidades. portanto buscaremos a compreensão e ampliação dos nossos conhecimentos sobre Polinômios Ortogonais num caso geral e os Polinômios Ortogonais Clássicos.

Material e Métodos

A metodologia consiste em um estudo dirigido pelo orientador, que fornece a bibliografia e material de estudo, esclarece dúvidas e ajuda em qualquer dificuldade encontrada durante o estudo do conteúdo. Além disso, toda semana acontece um seminário em uma sala de aula da UEMS para avaliação do estudo, onde é apresentado ao orientador todo o conteúdo estudado durante a semana.

Nosso estudo se concentrou basicamente na apostila "Polinômios Ortogonais e Similares Propriedades e Aplicações" de Eliana Xavier Linhares de Andrade e Cleonice Fátima Braccialida da UNESP de São José do Rio Preto.

A escolha do material foi feita pelo orientador, sua escolha se deve ao fato de ser um material muito completo, além disso, há poucos materiais na área, e a maioria dos materiais que existem são estrangeiros e sem tradução.

Resultados e Discussão

Para iniciar o estudo dos Polinômios Ortogonais Clássicos são necessários conhecimentos sobre Polinômios Ortogonais de modo geral, a seguir estão definições e resultados indispensáveis sobre o assunto. As demonstrações estão omitidas, por serem extensas.

<u>Polinômios Ortogonais</u>

<u>Definição 1</u>: *Sejam (a,b) um intervalo real $-\infty < a < b < \infty$ e $\varphi(x)$ uma função real limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a,b), se os momentos definidos por*

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\varphi(x)$$

Existem para $r = 1, 2, \ldots,$ então $d\varphi(x)$ é chamada distribuição (medida positiva) em (a,b).

Se $d\varphi(x) = w(x)dx,$ então $w(x) \geq 0$ em (a,b) mas não identicamente nula, e é chamada função peso

<u>Definição 2</u>: *Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequencia de polinômios ortogonais (SPO) com relação a função peso $w(x)$ no intervalo (a,b) se*

$$(i)\ P_n(x) e\ exatamente\ de\ grau\ n, n \geq 0$$

$$(ii)\ \langle P_n, P_m\rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, se\ n \neq m \\ \rho_n, se\ n = m \end{cases}$$

Note que neste caso, $\rho_n > 0,$ pois ${P_n}^2(x)w(x) \geq 0\ em\ (a,b)$

<u>Definição 3:</u> *Dizemos que uma (SPO) é uma sequência de polinômios ortonormais (SPO*), denotada por $\{P_n^*(x)\} = 0$, se $\rho_n\ =\ 1.$*

Notação: Denotaremos os polinômios ortogonais de grau n, $P_n(x)$ por

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i}x^i\,, \qquad a_{n,n} \neq 0$$

<u>Teorema 1:</u> *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $w(x)$ uma função peso no intervalo (a,b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) *$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequencia de polinômios ortogonais com relação á função peso $w(x)$ em (a,b).*

(b) *$\langle P_n, \pi\rangle = 0, para\ todo\ \pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}, n \geq 1$.*

(c) $\langle x^m, P_n \rangle = \int_a^b x^m P_n(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, se\ 0 \leq m \leq n-1 \\ \rho_n,\ se\ m = n \end{cases}$

<u>Teorema 2 (Relação de recorrência de três termos):</u> *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma (SPO) em (a,b) relativamente à função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), n \geq 0, \tag{1}$$

com $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0,\ \alpha_{n+1},\ \beta_n,\ \gamma_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1, e$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1,n+1}}{\alpha_{n,n}} \neq 0\ \ \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle},\ \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n,P_n\rangle}{\langle P_{n-1},P_{n-1}\rangle} \neq 0 \tag{2}$$

<u>Polinômios ortogonais na forma Mônica</u>

Para construirmos a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a $w(x)$, basta dividirmos cada P_n pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau.

<u>Polinômios Ortonormais</u>

Para construirmos uma sequência de polinômios ortonormais $\{P_n^*(x)\} = 0$ a partir de polinômios ortogonais P_n, dividirmos cada P_n por sua norma. Logo,

$$P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|},\ \ n \geq 1,\ \text{onde}\ \|P_n(x)\| = \sqrt{\langle P_n, P_n\rangle}.$$

<u>Polinômios Ortogonais Clássicos:</u>

Iniciamos aqui o estudo dos Polinômios Ortogonais Clássicos, que é o objetivo principal do projeto. A definição 7 abaixo está no trabalho de Agarwal e Milovanovic. Estudaremos os polinômios de Jacobi e seus casos especiais como os polinômios de Legendre, Chebyshev de 1ª e 2ª espécies e os polinômios de Gegenbauer, também veremos os polinômios de Laguerre e Hermite. Para cada tipo de polinômio destes estudamos seu coeficiente do termo de maior grau, a relação de ortogonalidade entre polinômios de mesmo tipo e a recorrência de três termos, além de propriedades particulares.

Definição 4: *Polinômios ortogonais com respeito ao produto interno da definição 2 no intervalo (a, b) são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso, $w(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d}{dx}\big(M(x)w(x)\big) = N(x)w(x),$$

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ (a, b) = (-1,1) \\ x, & se\ (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & se\ (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases} \quad e\ N(x) \text{é}\ um\ polinômio\ de\ grau\ 1.$$

Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(a,b)}(x)$, podem ser definidos através da fórmula de rodrigues dada por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right], \quad (3)$$

(Ver Krylov[11, pág.23] ou Chirrara[5, pág.143]). São ortogonais no intervalo [-1,1] com relação à função peso $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O coeficiente do termo de maior grau é

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}. \quad (4)$$

Teorema 3: *Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \neq 0, & se\ m = n. \end{cases} \quad (5)$$

A relação de recorrência para os polinômios de Jacobi é

$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x)$, $n \geq 0$, onde $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$,

$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}$, $\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}$, $\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}$.

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre $P_n(x)$ são um caso especial dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 0$. Portanto, $w(x) = 1$. Logo, da fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, temos

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right] = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \quad (6)$$

Do coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi, obtemos

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2\mathrm{n}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}+1)} = \frac{(2n)!}{2^n[n!]^2}.$$

A relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre é, então,

$$\langle P_n, P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & se\ m = n. \end{cases}$$

Polinómios de Chebyshev de 1ª espécie

Os polinómios de Chebyshev de 1ª espécie: Os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e são definidos:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ \ x \in [-1,1], \qquad n = 0,1,2, \ldots. \qquad (7)$$

Por recorrência obtemos o coeficiente do termo de maior grau, $a_{n,n} = 2^{n-1}, n \geq 1$.

Teorema 16: *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem*

$$\langle T_n, T_m\rangle = \begin{cases} \pi, & se\ m = n = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & se\ m = n > 0, \\ 0, & se\ m \neq n. \end{cases}$$

Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie: Os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U(x)$ são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ e são definidos por

$$U_n(x) = \frac{\mathrm{sen}((n+1)\arccos x),}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{sen\ ((n+1)\theta)}{sen\ \theta}, \qquad x \in [-1,1], \qquad n = 0,1,2, \ldots.$$

onde $x = \cos\theta$ e $\theta \in [0.\pi]$. A relação de recorrência de três termos

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \qquad n \geq 1, \text{com } U_0(x) = 1 \text{ e } U_1(x) = 2x.$$

Calculando os primeiros polinômios, veremos como se comportam os coeficientes dos termos de maior grau e pela relação de recorrência, obtemos $a_{n,n} = 2n$, $n \geq 0$.

Teorema 4: *relação de ortogonalidade para os polinômios de Chebyshev de 2 espécie é*

$$\langle U_n, U_m\rangle = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2}, & se\ \ m = n. \end{cases}$$

Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer são um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} > -1$. São ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. Os polinômios de Gegenbauer $G_n^{(\lambda)}(x)$ são dados por

$G_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1}\binom{n+2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, onde $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ são polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$.

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer é da forma

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x) \tag{8}$$

onde $G_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

<u>Polinômios de Laguerre</u>

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}],$$

(ver Krylov pág. 34, observamos que Chirara pág. 145 apresenta um múltiplo desta fórmula).

Nesta parte mostraremos que são polinômios ortogonais clássicos, no intervalo $[0,\infty)$, com relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$.

Calculando o coeficiente do termo de maior grau, obtemos $a_{n,n} = 1$. Os polinômios de Laguerre como definidos acima são, portanto, mônicos.

<u>Teorema 5:</u> *A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre é dada por*

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n, \\ n!\,\Gamma(n+\alpha+1), & se\ m = n \end{cases} \tag{24}$$

Dos resultados acima, obtemos facilmente que

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{n(n+1)!(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n+1)!\Gamma(\alpha+n)} = n(\alpha+n), \beta_{n+1} = 2n+\alpha+1.$$

Assim obtemos a relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x-(2n+\alpha+1))\, L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \ \ n \geq 1.$$

<u>Polinômios de Hermite</u>

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(x)$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]. \tag{9}$$

(ver Krylov pág. 33 ou Chihara pág. 145). Estes polinômios são polinômios ortogonais no intervalo $(-\infty,\infty)$, em relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$. A recorrência de três termos para os polinômios de Hermite é obtida através das equações (1), (2) e (26)

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad n \geq 1, \text{ com } H_0(x) = 1 \text{ e } H_1(x) = 2x.$$

E por recorrência, $a_{n,n} = 2^n$.

<u>Teorema 19:</u> *Os polinômios de Hermite satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle H_n, H_m\rangle = \int_{-\infty}^\infty H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0, & se\ \ m \neq n \\ 2^n n!\,, & se\ m = n. \end{cases} \tag{27}$$

Conclusões

O estudo dos Polinômios Ortogonais Clássicos se mostrou muito interessante, pois inclui muitas ferramentas matemáticas de diferentes áreas da matemática, revisamos e aprofundamos muitos conteúdos de álgebra linear, cálculo diferencial e integral entre outros para que pudéssemos compreender os resultados sobre Polinômios Ortogonais.

No estudo pudemos observar que para obter o coeficiente do termo de maior grau na maioria das vezes basta que calcular alguns polinômios e observar o que está acontecendo com o coeficiente, dessa forma conseguimos determinar o coeficiente por recorrência. Um exemplo disso são os Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie.

Já a relação de ortogonalidade é mais trabalhosa, mas consiste em calcular o produto interno definido para polinômios, o que exige conhecimento sobre as propriedades de integral e técnicas de integração, e conhecer algumas identidades trigonométricas entre outras. Mostrando o que acontece para os casos de polinômios de mesmo índice e de índices diferentes.

Por fim a relação de recorrência de três termos nos Polinômios Ortogonais Clássicos. Esta é determinada simplesmente pela substituição na fórmula de recorrência de três termos para polinômios ortogonais, e a partir daí melhorar a fórmula através de técnicas matemáticas.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao orientador Professor Fábio Rodrigues Lucas pela oportunidade de participar da Iniciação Científica, agradecer também à UEMS por financiar, confiar e apoiar o projeto.

Referências

AGARWAL, R.P., MILANOVIC, G.V. 2002. **Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials**. New York, Applied Mathematics and Computation - Orthogonal systems and applications, 151-166.

ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C. F. 2007. **Polinômios Ortogonais e Similares:** Propriedades e Aplicações. São José do Rio Preto, Universidade Estadual Paulista – UNESP, 90p.

CHIHARA, T.S. 1978. **An Introduction to Orthogonal Polynomials:** Mathematics and its Applications Series. New York, Gordon and Breach Science Publishers, 272p.

KRYLOV, V.I. 1962. **Approximate Calculation of Integrals**. New York, Macmillan Co., 368p.