POLINÔMIOS ORTOGONAIS E FRAÇÕES CONTÍNUAS

Aline de Mello Stoppa Bistaffa[1]**; Regina Litz Lamblém**[2]

[1]Acadêmica do Curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia; E-mail:alinestoppa@hotmail.com, **BOLSISTA DA UEMS**.
[2]Professora do curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia; E-mail:lamblem@uems.br

Área temática: Ciências exatas e da terra

Resumo
Neste trabalho apresentamos alguns resultados sobre polinômios ortogonais na reta real e frações contínuas, assim como, uma conexão entre esses dois temas. Os polinômios ortogonais e as frações contínuas possuem vastas aplicações em muitos problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas, por isso, tais assuntos foram e ainda são objetos de estudos de renomados pesquisadores. Embora os polinômios ortogonais e as frações contínuas satisfaçam a várias e importantes propriedades, neste trabalho, damos maior ênfase àqueles resultados que abrem caminho para conectar os dois temas.

Palavras Chaves: Relação de Recorrência. Ortogonalidade. Fórmulas de Wallis.

Introdução

Segundo Álvarez-Nodarse (2003), os polinômios ortogonais correspondem a uma pequena parte de uma grande família de funções especiais e sua história se remonta desde o século XVIII e está extremamente relacionada com a resolução de problemas de aplicação prática.

Os polinômios ortogonais na reta real satisfazem a uma relação de recorrência de três termos, ver, por exemplo, Andrade e Bracciali (2009), Andrews, Askey e Roy (2000) e Chihara (1978).

Há uma conexão entre polinômios ortogonais na reta real e frações contínuas. Os resultados que contribuem para estabelecer esta conexão é a relação de recorrência de três termos que os polinômios ortogonais na reta real satisfazem e as fórmulas de Wallis obtidas através de frações contínuas.

Neste trabalho, nosso objetivo é conhecer um pouco da teoria dos polinômios ortogonais na reta real e das frações contínuas, assim como estabelecer uma conexão entre polinômios ortogonais e frações contínuas.

Materiais e Metódos

A Unidade Universitária de Cassilândia dispôs de condições técnicas de infra-estrutura e equipamentos para a viabilização e execução do projeto, tais como, computadores conectados a internet, papel e tinta para impressão de materiais e relatórios.

A orientadora disponibilizou para a acadêmica os seguintes materiais: Andrade e Bracciali (2009), Andrews, Askey e Roy (2000) e Chihara (1978). Além disso, a acadêmica pesquisou na internet outros materiais sobre os assuntos estudados.

O projeto foi desenvolvido através de 20 horas semanais, sendo que 3 horas por semana foram dedicadas a apresentação de seminários pela acadêmica à orientadora e a interessados na área e as outras 17 horas semanais a acadêmica usou para executar tarefas definidas pela orientadora e para a preparação dos seminários. As tarefas e o tema do seminário a ser apresentado a cada semana foram definidos de comum acordo entre orientadora e acadêmica.

Resultados e Discussão

Conforme veremos, os polinômios ortogonais na reta real e as frações contínuas satisfazem a muitas propriedades, no entanto, como neste trabalho nosso maior interesse é estabelecer uma conexão entre polinômios ortogonais na reta real e frações contínuas, faremos a demonstração de apenas dois teoremas que contribuirão diretamente com esta conexão, sendo um deles sobre a relação de recorrência de três termos dos polinômios ortogonais e o outro envolvendo frações contínuas.

Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $w(x)$ uma função definida e não negativa em (a, b). Se

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(x)dx > 0,$$

para qualquer subintervalo $[\alpha, \beta]$ de (a, b), então $w(x)$ é chamada de função peso em (a, b).

Dizemos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso $w(x)$, no intervalo (a, b) se $P_n(x)$ é de grau exatamente n, $n \geq 0$ e

$$< P_n, P_m >= \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Nesse caso, o intervalo (a, b) é chamado de intervalo de ortogonalidade dos polinômios $P_n(x)$.

Uma das propriedades interessante dos polinômios ortogonais na reta real é que seus zeros são todos reais distintos e estão no intervalo de ortogonalidade.

Podemos, facilmente verificar que se $P_0(x), P_1(x), P_2(x), ..., P_m(x)$ pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais, então $P_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, formam uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a m.

Usando a notação $P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + ... + a_{n,1}x + a_{n,0},\ a_{n,n} \neq 0,\ a_{n,i} \in \mathbb{R}$, para $i = 1,\ 2, \ldots, n$, mostraremos que os polinômios ortogonais satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 1. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso w(x). Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),\ n \geq 0,$$

com $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0,\ \alpha_{n+1},\ \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1,$ e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{< xP_n, P_n >}{< P_n, P_n >}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1} < P_n, P_n >}{\gamma_n < P_{n-1}, P_{n-1} >} \neq 0.$$

Demonstração. Como $P_0(x), P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais, então $P_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, formam uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n.

Dessa maneira, como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x).$$

Daí, igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, temos

$$a_{n,n} = b_{n+1} a_{n+1,n+1},$$

ou seja,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Assim, das relações de ortogonalidade,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x) x P_j(x) w(x) dx = 0 \quad \text{para} \quad j \leq n-2,$$

o que nos fornece,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } j \leq n-2.$$

Portanto, $b_j = 0$ se $j \leq n-2$, e,

$$xP_n(x) = b_{n+1} P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x).$$

Logo,

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}} x P_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}} P_n(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) P_n(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}(x), \tag{1}$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Para calcular, os valores de γ_{n+1}, α_{n+1} e β_{n+1}, basta usar as relações de ortogonalidade e a relação (1). ■

Dizemos que um polinômio está na forma mônica quando o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

Facilmente podemos construir a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\left\{\hat{P}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a $w(x)$ a partir dos polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a $w(x)$. Para isso, basta dividirmos cada P_n pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, isto é,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

Assim, para obtermos a relação de recorrência de três termos para esses polinômios mônicos, dividimos a relação de recorrência do Teorema 1 por $a_{n+1,n+1}$, o que nos fornece

$$\frac{P_{n+1}(x)}{a_{n+1,n+1}} = (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) \frac{P_n(x)}{a_{n+1,n+1}} - \alpha_{n+1} \frac{P_{n-1}(x)}{a_{n+1,n+1}}, \quad n \geq 0,$$

daí,

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})\frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}\hat{P}_n(x) - \alpha_{n+1}\frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n+1,n+1}}\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

e como $\dfrac{a_{n.n}}{a_{n+1,n+1}} = \dfrac{1}{\gamma_{n+1}}$, então

$$\hat{P}_{n+1}(x) \;=\; \left(x - \frac{\beta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\right)\hat{P}_n(x) - \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_n\gamma_{n+1}}\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Fazendo algumas manipulações algébricas nos coeficientes da relação de recorrência anterior, obtemos a relação de recorrência para os polinômios ortogonais mônicos

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1})\hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1}\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{2}$$

com condições iniciais $\hat{P}_{-1}(x) = 0$, $\hat{P}_0(x) = 1$ e coeficientes

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\left\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_n\right\rangle}{\left\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n\right\rangle}, \qquad \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\left\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n\right\rangle}{\left\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1}\right\rangle}. \tag{3}$$

A seguir falaremos sobre fração contínua e algumas de suas propriedades.

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \,+\, \frac{b_2}{a_2} \,+\, \frac{b_3}{a_3} \,+\, \cdots, \tag{4}$$

onde $a_0, a_1, a_2, ...$ e $b_1, b_2, b_3, ...$ são números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas.

O lado direito da expressão (4) é uma forma mais prática de escrever uma fração contínua pelo fato de economizar mais espaço.

Os termos $\dfrac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, ...$, são chamados de quociente parcial, sendo a_i e b_i, respectivamente, os denominadores e numeradores do quociente parcial $\dfrac{b_i}{a_i}$.

Em Andrade e Bracciali (2005), podemos encontrar vários exemplos e aplicações de frações contínuas e também uma reflexão envolvendo aspectos curriculares epistemológicos e didáticos para a discussão da temática das Frações Contínuas no ciclo básico.

Consideremos a sequência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$, construída da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_1 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} \\ C_2 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} \,+\, \frac{b_2}{a_2} \\ &\vdots \\ C_n &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} \,+\, \frac{b_2}{a_2} \,+ \cdots \,+ \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

Dizemos que C_n é o n-ésimo convergente da fração contínua (4).

Dizemos que a fração contínua (4) converge para um valor K (finito) se apenas um número finito de convergentes são indefinidos e $\lim_{n\to\infty} C_n = K$.

Escrevendo $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ o próximo teorema mostra que p_n e q_n satisfazem a uma recorrência.

Teorema 2. *Seja* $C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $n \geq 0$, *então as sequências* $\{p_n\}$ *e* $\{q_n\}$ *satisfazem às relações de recorrência*

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

com $n \geq 1$, *e condições iniciais* $p_{-1} = 1, p_0 = a_0, q_{-1} = 0, q_0 = 1$ *e* $a_n \neq 0$ *para* $n \geq 1$.

Demonstração. Para $n = 1$, o resultado é válido, pois

$$p_1 = a_0 a_1 + b_1 = a_1 p_0 + b_1 p_{-1} \quad \text{e} \quad q_1 = a_1 = a_1 q_0 + b_1 q_{-1}.$$

Suponhamos que $p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$ e $q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$ valem para $n \leq k$, e, mostremos que também vale para $n = k+1$.

Como

$$C_{k+1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \, + \, \frac{b_2}{a_2} \, + \, \cdots \, + \, \frac{b_k}{a_k} \, + \, \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}},$$

Seja $a_0 + \dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + \cdots + \dfrac{b_k}{a_k^*} = C_k^*$, onde $a_k^* = a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ e C_k^*, o k-ésimo convergente da fração contínua

$$C_{k+1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \, + \, \frac{b_2}{a_2} \, + \, \cdots \, + \, \frac{b_k}{a_k} \, + \, \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}.$$

Usando a hipótese de indução para C_k^*, obtemos

$$C_{k+1} = C_k^* = \frac{a_k^* p_{k-1} + b_k p_{k-2}}{a_k^* q_{k-1} + b_k q_{k-2}} = \frac{[a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}]p_{k-1} + b_k p_{k-2}}{[a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}]q_{k-1} + b_k q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2} + (\dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}})p_{k-1}}{a_k q_{k-1} + b_k q_{k-2} + (\dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}})q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + b_{k+1} p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + b_{k+1} q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \; ,$$

conforme queríamos demonstrar. ■

As fórmulas $p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$ e $q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$ são conhecidas como fórmulas de Wallis, onde p_n e q_n são, respectivamente, o numerador e denominador do n-ésimo convergente.

As fórmulas de Wallis fornecem uma ligação direta entre polinômios ortogonais na reta real e fração contínuas, como veremos a seguir.

Substituindo

$$a_0 = 0 \; , \; b_1 = \alpha_1 \neq 0 \; , \; b_{n+1} = -\alpha_{n+1} \neq 0 \; , \; a_n = x - \beta_n \; , \; n \geq 1,$$

na fração contínua (4), obtemos a seguinte fração contínua

$$\frac{\alpha_1}{x - \beta_1} \text{ - } \frac{\alpha_2}{x - \beta_2} \text{ - } \frac{\alpha_3}{x - \beta_3} \text{ - } \cdots \tag{5}$$

com $\alpha_1 = \mu_0$.

Pelo Teorema 2, concluímos que o denominador do n-ésimo convergente da fração fração contínua (5) satisfaz à seguinte relação de recorrência

$$q_n(x) = (x - \beta_n)q_{n-1}(x) - \alpha_n q_{n-2}(x)\ ,\ n \geq 1, \tag{6}$$

com $q_{-1}(x) = 0$ *e* $q_0(x) = 1$.

Comparando a relação de recorrência (6) com a relação de recorrência (2), podemos verificar que a sequência dos denominadores do n-ésimo convergente da fração fração contínua (5) formam a sequência de polinômios ortogonais mônicos na reta real.

Para outras informações sobre os polinômios ortogonais e frações contínuas, ver, por exemplo, Andrews, Askey e Roy (2000) e Chihara (1978).

Conclusões

No decorrer do nosso estudo com relação aos polinômios ortogonais na reta real, observamos que eles satisfazem a várias propriedades que os polinômios de maneira geral não satisfazem. Dentre elas, vimos que polinômios ortogonais na reta real satisfazem a uma relação de recorrência de três termos e possuem todos os zeros reais, distintos e localizados no interior do intervalo de ortogonalidade.

Em especial, o caminho que usamos para conectar os polinômios ortogonais na reta real com frações contínuas foi exatamente a relação de recorrência de três termos.

Embora não entramos em detalhes, observamos que o estudo das frações contínuas pode também ser introduzido para alunos do ensino Médio.

No entanto, neste trabalho nos restringimos a apenas uma pequena parte da teoria das frações contínuas e dos polinômios ortogonais na reta real, necessário para estabelecer a conexão entre os dois temas, mas vimos que a teoria das frações contínuas e dos polinômios ortogonais na reta real é muito mais ampla e possuem muitas aplicações.

Agradecimentos

Agradeço a instituição UEMS por ter proporcionado a oportunidade de desenvolver este projeto com bolsa.

Referências

ÁLVAREZ-NODARSE, R. 2003. **Polinômios hipergeométricos clássicos**. Zaragoza: Universidade de Zaragoza.

ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C.F. 2009. **Polinômios Ortogonais e Similares**, IBILCE/UNESP, Apostila.

ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C.F. 2005. **Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações** Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, 20.

ANDREWS, G. E., ASKEY, R., ROY, R. 2000. **"Special Functions"**, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press.

CHIHARA, T. S. 1978. **An Introduction to Orthogonal Polynomials**, Mathematics and its Apllications Series, Gordon and Breach, New York.