MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Isabella Barbosa Menezes (Bolsista UEMS)[1]; Marco Aparecido Queiroz Duarte (Orientador)[2]

[1]Estudante do curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia; bebella_ms@hotmail.com
[2]Professor do curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia; marco@uems.br

Ciências Exatas e da Terra

Resumo - Este trabalho apresenta os métodos de interpolação de Lagrange, Newton e spline, importantes para aproximações de funções, pois fazem estimações de pontos dentro de um intervalo conhecido, sendo possível verificar suas precisões através de cálculos de erros. Os dois primeiros fazem estimações em subintervalos ou ao longo de todo intervalo enquanto que a interpolação por Spline trabalha apenas subintervalos do intervalo conhecido.

Palavras-chave: Aproximação. Lagrange. Newton. Spline.

1- Introdução

Métodos de interpolação são utilizados para estimar valores de uma função dentro de um intervalo conhecido. Isto é, num conjunto de dados tabelados, podemos inserir pontos entre os mesmos. Conhecendo os conjuntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, ou seja, $(n+1)$ pontos, podemos obter o polinômio interpolador $P(x)$. O grau de $P(x)$ será no máximo n, porém dependerá do número de pontos que se pretende interpolar e da precisão que se almeja (RUGGIERO e LOPES, 1997; SPERANDIO, MENDES e SILVA, 2003). A interpolação é aplicável na resolução de problemas como: crescimento populacional, na resolução de problemas físicos, computacionais, entre outros.

O grau do polinômio interpolador depende do número de pontos conhecidos e de pontos que se quer interpolar, pois polinômios de graus muito elevados podem causar extrapolação. Conforme se pode verificar na Figura 1 (RUGGIERO E LOPES, 1997).

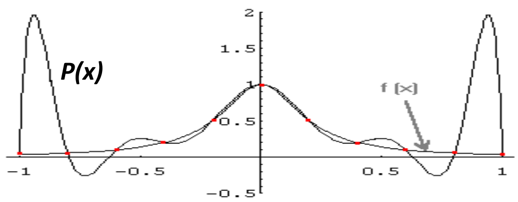

Figura 1 – Função e seu polinômio interpolador

2 – INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Nesta seção serão detalhados os métodos de Lagrange, Newton e Splines.

2.1 – Forma de Lagrange

Sejam $x_0, ..., x_n$, $(n+1)$ pontos distintos, $y_i = f(x_i)$, $i= 0, ...,n$ e $p_n(x)$ o polinômio de grau menor ou igual a n que interpola f em $x_0, ..., x_n$. Podemos representar $p_n(x) = Y_0 L_0(x) + Y_1 L_1(x) + \cdots + Y_n L_n(x)$, onde os polinômios $L_k(x)$ são de guau n. Para cada i, queremos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, ou seja, (SPERANDIO, MENDES e SILVA, 2003):

$$p_n(x_i) = Y_0 L_0(x_i) + Y_1 L_1(x_i) + ... + Y_n L_n(x_i) = y_i$$

Com esta condição, definimos $L_k(x)$ da seguinte forma:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot \cdots \cdot(x - x_{k-1})\cdot(x - x_{k+1})\cdot \cdots \cdot(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdot(x_k - x_1)\cdot \cdots \cdot(x_k - x_{k-1})\cdot(x - x_{k+1})\cdot \cdots \cdot(x_k - x_n)}$$

O numerador $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma $(x - x_i)$, $i=0, ..., n, i \neq k$. Assim $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e então, $p_n(x) \leq n$.

Além disso, para $x = x_i$, $i = 0, ...,n$ temos:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$

Então, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Sendo

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)} \qquad (1)$$

2.2 Forma de Newton

A forma de Newton para $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ pontos distintos é (RUGGIERO e LOPES, 1997; CUNHA, 2000):

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (2)$$

Seguindo, temos:

i) O operador de diferenças divididas, uma vez que os coeficientes d_k, $k = 0, 1, ..., n$ acima são diferenças divididas de ordem k entre os pontos $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, 1, ..., k$.

ii) a dedução da expressão de $p_n(x)$ dada por (2).

2.2.1 Operador de diferenças divididas

Seja $f(x)$ uma função tabelada em $n+1$ pontos distintos: $x_0, x_1, ..., x_n$. O operador de diferenças divididas é definido por (RUGGIERO e LOPES, 1997):

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) & (\text{ordem zero}) \\ f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & (\text{ordem } 1) \\ j[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} & (\text{ordem } 2) \\ j[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} & (\text{ordem } 3) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & (\text{ordem } n) \end{cases}$$

Dizemos que $d_{k+1}=f[x_0, x_1, ..., x_k]$ é a diferença dividida de ordem k da função $f(x)$ sobre os $k+1$ pontos.

2.3 - Funções Splines e Interpolação

As funções splines atendem 4 condições (RUGGIERO e LOPES, 1997; SCHEID, 1991):

1) Dividimos o intervalo $[x_o , x_n]$ em subintervalos $[x_i , x_{i+1}]$, com $i = 0, 1,..., (n – 1)$ e a cada subintervalo teremos uma aproximação polinomial diferente, obtendo assim $S_p(x)$, um polinômio de grau p, definido por:

$$S_p(x) = \begin{cases} s_0(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ s_1(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

2) O intervalo $[a, b]$ é o denominador da função $S_p(x)$;
3) $S_p(x)$ deve ser contínua e possuir derivadas contínuas até ordem $(p –1)$, em $[a, b]$;
4) $S_p(x_i) = f(x_i)$, com $i = 0, 1, ..., n$.

2.3.1 - Spline Linear Interpolante

Para realizar a interpolação é preciso conhecer $(n + 1)$ pontos distintos, chamados de nós. A interpolação por spline linear é dada por $S_1(x)$, nos pontos $x_0, x_1,..., x_n$ e nos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2,..., n$ como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \cdot \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (3)$$

A Figura 2 ilustra o caso da aproximação de uma função por spline linear. Observamos que $S_1(x)$ é contínua no intervalo definido, porém não é derivável em todo o intervalo. Então vemos que essa aproximação não é a mais adequada, pois além de não ser derivável em todo o intervalo, $S_1(x)$ ainda sofre mudanças bruscas de um subintervalo para outro.

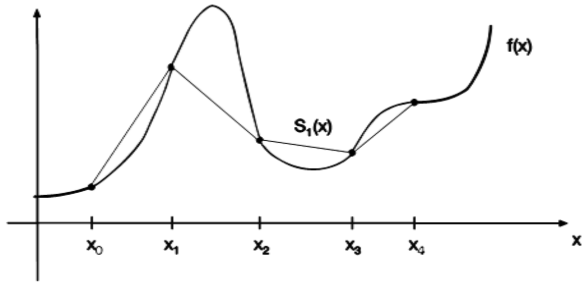

Figura 2 – Aproximação de uma função por Spline linear

2.3.2 – Spline Cúbica Interpolante

Uma spline cúbica $S_3(x)$ é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de grau 3, definida num intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. A spline cúbica, possui derivada primeira e segunda contínuas, que a torna uma curva suave e sem mudanças nas curvas de cada subintervalo (CUNHA, 2000).

Suponha $f(x)$ dada por x_i, com $i = 0, 1,..., n$, onde existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$.

$S_3(x)$ deve satisfazer cinco condições:

i) $S_3(x) = S_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 0, 1,..., n$;

ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, com $i = 1, 2,..., n$;

iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n-1)$;

iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n-1)$;

v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2,..., (n-1)$.

Com essas condições chegamos a quatro coeficientes. Fazendo $s''_k(x_k) = g_k$ e $f(x_k) = y_k$ temos:

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}, \quad b_k = \frac{g_k}{2}, \quad c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6} \quad \text{e} \quad d_k = y_k$$

Pela condição (iv) chega-se a equação (4)

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right) \tag{4}$$

A equação (4) pode ser representada na forma matricial $Ax = b$. Sendo $x = (g_0, g_{1,...}, g_n)^t$, a matriz incógnita

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_4 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_{n-2}) & h_n & & \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n+1)}$$

e

$$b = 6\begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1)\times 1}$$

Resolvendo este sistema, podemos então determinar a_k, b_k, c_k e d_k, para cada $s_k(\bar{x})$.

3- Materiais e métodos

O Projeto foi desenvolvido através de seminários semanais que foram apresentados pela acadêmica a todos os interessados na área. A bolsista contou com o auxilio do orientador na apresentação destes seminários. Os métodos estudados foram aplicados à análise do crescimento da cana-de-açúcar, em conjunto com pesquisadores do curso de agronomia da unidade universitária de Cassilândia. O métodos são implementados computacionalmente através do software MATLAB.

4- Resultados e Discussão

Este projeto estuda métodos de interpolação polinomial e procura aplicá-los a pesquisas desenvolvidas na unidade universitária de Cassilândia. Embora os resultados não sejam mostrados neste trabalho, por falta de espaço, tais métodos são eficientes para o caso estudado, com uma ligeira vantagem para o método de Newton. Para este caso, todos os pontos interpolados obtiveram alturas dentro dos intervalos estudados, a maioria dos erros ficou abaixo de 10%, considerado excelente por estudiosos em agronomia. Como forma de divulgação do projeto, foi apresentada uma comunicação oral na V semana acadêmica do Campus da UFMS de Paranaíba com o título "*Interpolação Spline usada no Cálculo da altura da Cana-de-açúcar*". Com o mesmo título foi submetido e aceito para publicação um artigo científico à revista Omnia Exatas. Outros trabalhos estão sendo preparados para publicação.

Referências

CUNHA, M. C. C, 2000, "Métodos Numéricos", Editora da UNICAMP, Campinas.

RUGGIERO, M. A. G, LOPES, V. L. R, 1997, “Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais”, Makron Books, São Paulo.

SCHEID, F, 1991, “Análise Numérica”, Editora McGraw-Hill de Portugal.

SPERANDIO, D, MENDES, J. T, SILVA, L. H. M, 2003, “Cálculo Numérico – Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos”, Prentice Hall, São Paulo.