

# APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES VIA QUADRADOS MÍNIMOS

**Willian Carvalho da Silva<sup>1</sup>**

**Marco Aparecido Queiroz Duarte<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Estudante do Curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia;

E-mail: [dog.carvalho@hotmail.com](mailto:dog.carvalho@hotmail.com)

<sup>2</sup>Professor Marco Aparecido Queiroz Duarte do Curso de Matemática da UEMS, Unidade

Universitária de Cassilândia; E-mail: [marco@uems.br](mailto:marco@uems.br)

**Área temática:** Matemática Aplicada

## **Resumo:**

Este trabalho teve como finalidade abordar o estudo de aproximações de funções via quadrados mínimos, antes, porém foram estudados três métodos de interpolação para que o acadêmico se familiarizasse com o conteúdo, os métodos de interpolação estudados foram interpolação polinomial Simples, Lagrange e Newton. Já para os quadrados mínimos, foram estudados o caso discreto e o caso contínuo. Em busca de bons resultados foi feito o estudo de polinômios ortogonais, em especial os da família e Legendre e Tchebyshev, pois estes fazem com que o erro cometido nas aproximações via quadrados mínimos por caso discreto não extrapolem demasiadamente. Assim os métodos foram estudados e comparados, em sua precisão, onde também levamos em consideração o erro cometido em cada aproximação realizada. Os métodos foram adequados para alguns fenômenos estudados por pesquisadores do curso de Agronomia da unidade de universitária de Cassilândia.

**Palavras Chave:** Interpolação. Ajuste. Polinômios ortogonais.

## **Introdução**

A interpolação consiste em encontrar valores dentro de um conjunto de dados conhecidos, ou seja, conhecendo apenas os dados tabelados de uma determinada função sem conhecer sua forma analítica podemos encontrar pontos não fornecidos. Neste trabalho são apresentados três métodos de interpolação, sendo estes, interpolação polinomial Simples, na forma de Lagrange e Newton.

Quando desejamos estimar valores fora do intervalo conhecido, a interpolação já não é mais aconselhada. Neste caso a utilização do método de ajuste de curva via quadrados mínimos é mais apropriado, pois este nos permite estimar valores fora do intervalo conhecido, sem extrapolar, ou seja, estimar valores sem cometer um erro muito grande.

## Material e Métodos

Os trabalhos foram desenvolvidos por meio de seminários, que tem a duração de 3 horas, e foram expostos semanalmente, sendo que estes seminários são apresentados pelo acadêmico ao orientador e interessados na área. Sempre que preciso o bolsista pode contar com o auxílio do orientador na apresentação destes seminários.

Como o acadêmico dedica 03 horas semanais para os respectivos seminários do projeto, as outras 17 horas são usadas para executar tarefas definidas pelo orientador, para o desenvolvimento da pesquisa e para a preparação do seminário. As tarefas e o tema do seminário apresentados, são atividades definidas de comum acordo entre orientador e acadêmico, sendo que o orientador sempre auxilia na preparação do seminário e o atende as dúvidas em questão.

## Resultados e Discussão

Métodos de interpolação são métodos utilizados quando desejamos estimar um valor não fornecido de uma função tabelada. A partir de dados previamente obtidos, com a interpolação podemos inserir pontos entre os dados conhecidos (SCHEID, 1991).

Para que seja possível realizar a interpolação é necessário conhecer  $(n + 1)$  pontos distintos, pois é necessário conhecer mais que um único ponto. Conhecendo os pontos  $((x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)))$ , queremos então obter um polinômio que passe por estes mesmos pontos, ou seja:  $f(x_k) = P(x_k)$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Chamamos  $P_n(x)$  de polinômio interpolador e, como já foi observado, deve se conhecer  $(n + 1)$  pontos distintos, e este polinômio interpolador terá grau menor ou igual a  $n$ .

Existem diferentes formas de se obter o polinômio interpolador nesta pesquisa são apresentados a resolução do sistema linear, a forma de Lagrange e a forma de Newton, mas vale ressaltar que todas conduzem ao mesmo resultado (ROQUE 2000, GALVÃO; NUNES, 2005). Podemos encontrar  $P_n(x)$  com a forma de resolução por sistema linear:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

Vemos que o problema consiste em obter os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , para que encontremos o polinômio interpolador. Deste modo, podemos escrever  $P_n(x)$  na forma matricial, como poderá ser visto a seguir:  $A \cdot x = f(x)$

$$x_n \quad (2)$$

Vale observar que na equação (2)  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  são pontos distintos e portanto a matriz  $A$  é uma matriz de Vandermonde, logo teremos  $Determinante(A) \neq 0$ , daí, o sistema

admite solução única e, assim, concluímos que  $P_n(x)$  é único. Como já foi mencionado podemos obter a função interpoladora a partir de outros métodos, além da resolução por sistema linear, como a forma de Lagrange que será abordada a seguir. Os critérios para realizar a interpolação por sistema linear são os mesmos para a interpolação de Lagrange e Newton, em relação ao número de pontos que se deve conhecer, e ao grau da função encontrada. Sob o método de Lagrange  $P_n(x)$  pode ser escrito, assim:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n [f(x)_k] l_k(x) \quad (3)$$

Onde definimos que:

$$l_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)} \quad (4)$$

O Método de interpolação de Newton usa para a determinação dos coeficientes do polinômio interpolador, os operadores de diferenças divididas. O polinômio interpolador de Newton é escrito da seguinte forma:

$$P_n(x) = d_0 + d_1 \cdot (x - x_0) + d_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + d_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Sendo  $d_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , os **operadores de diferenças divididas**, são definidos por:

$$d_0 = f[x_0] = f(x_0) \quad \text{ordem } 0$$

$$d_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{ordem } 1$$

$$d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \quad \text{ordem } 2$$

:

:

:

$$d_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{ordem } n$$

Observando a tabela acima percebemos que os operadores de diferenças divididas que devem ser adotados seguem a partir do  $x_0$  escolhido a priori, por uma diagonal, até a ordem dos operadores desejada (ordem  $n$ ). Quando é preciso encontrar um valor fora do intervalo, a interpolação não é aconselhada, pois o polinômio  $P_n(x)$  é obtido apenas para valores dentro do intervalo  $[x_0, x_n]$ . Neste caso, um método adequado pode ser o ajuste via quadrados mínimos (CUNHA, 2000).

O problema de ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos consiste em dada uma função  $f(x)$ , conhecendo apenas uma tabela de pontos  $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \dots, (x_m, f(x_m)))$ , sendo esta função definida num intervalo  $[a, b]$ . Deste modo teremos que encontrar a função:  $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$  a priori são escolhidas as funções  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ , mas é necessário que estas funções escolhidas sejam contínuas no intervalo  $[a, b]$ , portanto o problema é obter os coeficientes,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  de uma forma que  $\varphi(x)$  se aproxime ao máximo de  $f(x)$ .

As funções  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ , podem ser escolhidas, a partir do momento em que colocamos os pontos tabelados em um gráfico cartesiano, sendo este também chamado de diagrama de dispersão. Assim, feito o gráfico, podemos ver com qual função ela tem comportamento semelhante, pois segundo Ruggiero e Lopes “Através deste diagrama pode-se visualizar a curva que melhor se ajusta aos dados” (RUGGIERO e LOPES, 1997). Concluímos então que a escolha das funções é feita a partir de observações ao gráfico da função tabelada. O problema de encontrar  $\varphi(x)$  pode ser resolvido por caso discreto ou caso contínuo. Sob o caso discreto temos que impor que o desvio seja mínimo, ou seja  $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$ , deve ser mínimo para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, m$ , devemos ainda considerar que o número de pontos conhecidos deve ser maior que o número de funções escolhidas ou os coeficientes, isto é:

$$\sum_{k=1}^m d_k^2 = [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2$$

Derivando  $d_k$  para cada  $k$  obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left[ \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \alpha_1 \cdots \cdots + \left[ \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot g_n(x_k) \right] \alpha_n = \left[ \sum_{k=1}^m g_1(x_k) \cdot f(x_k) \right] \\ \left[ \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \alpha_1 \cdots \cdots + \left[ \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot g_n(x_k) \right] \alpha_n = \left[ \sum_{k=1}^m g_2(x_k) \cdot f(x_k) \right] \\ \vdots \\ \left[ \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot g_1(x_k) \right] \alpha_1 \cdots \cdots + \left[ \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot g_n(x_k) \right] \alpha_n = \left[ \sum_{k=1}^m g_n(x_k) \cdot f(x_k) \right] \end{cases} \quad (6)$$

Assim, os valores dos  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  são obtidos através da resolução do sistema acima. Vale observar que aconselha-se que quando as funções  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$  são ortogonais entre si a aproximação é melhor (RUGGIERO; LOPES, 1997). Desta forma, foram estudadas duas famílias de polinômios ortogonais, as de Legendre e Tchebyshev.

Seja  $n$  o grau do polinômio temos que, os polinômios de Legendre são definidos no intervalo  $[-1, 1]$  pela seguinte fórmula (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003):

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \end{cases} \quad (7)$$

A família dos polinômios de Tchebyshev também é definida no intervalo  $[-1, 1]$ , sendo os polinômios de Tchebyshev dado pela seguinte fórmula (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003):

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \cos^{-1}(x)] \quad (8)$$

Os métodos de interpolação e o método dos quadrados mínimos foram aplicados a uma pesquisa do curso de agronomia da Unidade Universitária de Cassilândia. Esta pesquisa estuda o crescimento da cana-de-açúcar com diferentes tipos de adubação. Como divulgação do trabalho foi apresentada uma comunicação oral na V semana da Matemática do Campus de Paranaíba da UFMS com o título "Método dos Mínimos Quadrados Aplicado ao Problema do Crescimento da Cana-de-açúcar". Também foi submetido e aceito para publicação à revista Omnia Exatas um artigo científico com o título "Interpolação Spline usada no Cálculo da altura da Cana-de-açúcar". Também foi submetido a revista da ADUEMS, que aguarda aprovação em assembléia, um artigo científico com o título "Ajuste de Curvas Via Mínimos Quadrados Aplicado ao Problema do Crescimento da Cana-de-açúcar".

**Agradecimentos**

Agradeço a Instituição UEMS por ter proporcionado a oportunidade de desenvolver este trabalho.

### **Referências**

CAMPOS, F. F. 2001. **Algoritmos Numéricos**, Ed. LTC, Rio de Janeiro.

CUNHA, M. C. C. 2000. **Métodos Numéricos**, 2<sup>a</sup> ed., Editora da Unicamp, Campinas.

FERREIRA, R. S. 1999. **Matemática Aplicada às Ciências Agrárias**, Editora UFV, Viçosa.

GALVÃO, L. C. & NUNES, L. F. 2005. **Cálculo Numérico**, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná.

RUGGIERO, M. A. G. & LOPES, V. L. R. 1997. **Cálculo Numérico**, 2<sup>a</sup> ed., Editora Makron Books, São Paulo.

SCHEID, F. 1991. **Análise Numérica**, 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, Lisboa.