# UM ESTUDO SOBRE MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

**Valdir Junior Florentin de Aguiar[1]; Maristela Missio[2]**

[1]Estudante do curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Dourados; E-mail: valdirjr.aguiar@gmail.com.

[2]Professora do curso de Matemática da UEMS, Unidade Universitária de Dourados; E-mail: maristela@uems.br.

Matemática Aplicada

**Resumo**

Neste trabalho propomos um modelo matemático para estudar a dinâmica de propagação temporal da epidemia conhecida por Toxoplasmose, através da evolução de parasitas em uma população hospedeira de gatos. Para este estudo, sugerimos um modelo compartimental formulado através de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

**Palavras-chave**: *Toxoplasma Gondii, Modelos Matemáticos, Equações Diferenciais Ordinárias*

## Introdução

A maioria dos modelos matemáticos para populações acometidas de uma determinada infecção tem como ponto inicial a hipótese de que a população total pode ser dividida em subpopulações, apresentando significados epidemiológicos em conformidade com a dinâmica biológica da doença. Estes modelos distinguem os indivíduos de uma população de acordo com seu estado em relação à doença, chamados modelos determinísticos compartimentais.

A modelagem para as classes epidemiológicas que geram os modelos do tipo compartimental podem ser representados por sistemas de equações diferenciais e solucionados por métodos numéricos apropriados como, por exemplo, os de Runge-Kutta, quando a

abordagem é explícita, [5].

Neste trabalho, propomos um modelo matemático para estudar a dinâmica de propagação temporal da epidemia conhecida por Toxoplasmose, através da evolução de parasitas em uma população hospedeira de gatos.

**Materiais e Métodos**

O trabalho foi desenvolvido fazendo-se um estudo bibliográfico de técnicas de modelagem e análise de modelos clássicos adotados em estudos epidemiológicos, por meio de livros listados nas Referências, laboratório de computação, estudos dirigidos e seminários sobre os temas estudados.

**Discussão**

A Toxoplasmose é uma zoonose causada pelo protozoário *Toxoplasma gondii*, que afeta várias espécies animais, sendo que os gatos são os principais hospedeiros, responsáveis pela continuidade da doença por diversas áreas do mundo. A reprodução sexuada do *Toxoplasma gondii* acontece unicamente no intestino dos gatos, onde são produzidos os oocistos, eliminados nas fezes, contaminando a água, o solo, as plantas e os animais. A contaminação ocorre, em geral, pela ingestão de carne de roedores ou de pequenas aves infectadas. A Toxoplasmose não é transmitida no contato com uma pessoa contaminada, exceto por transmissão durante a gravidez, [4].

Os medicamentos controlam a infecção, mas não erradicam totalmente o *Toxoplasma gondii* que permanece em estado latente no organismo. Os sintomas da toxoplasmose são variados, vão desde uma infecção assintomática até um quadro clínico muito grave. Nos humanos, hospedeiros intermediários do parasita, a maior preocupação é com as gestantes e pacientes imunodeprimidos, nos quais a doença pode ser letal.

Para este estudo, sugerimos um modelo compartimental formulado através de um sistema de equações diferenciais ordinárias, [3, 5]. Com base em [1, 2], assumimos os seguintes pressupostos: taxas de natalidade e mortalidade natural da população de gatos; a infecção não induz os hospedeiros à morte; uma vez infectado, o gato permanece assim

por toda a sua vida; não são consideradas taxas de migração e imigração de gatos; a transmissão se dá por contato adquirido entre a concentração de parasita com gatos suscetíveis; não é considerado o tempo transcorrido entre o consumo do parasita e a expulsão do oocisto ao solo.

Consideramos as populações de parasitas $P(t)$ e de gatos subdivididos em gatos suscetíveis $S(t)$ e infectados $I(t)$, todas variando em relação ao tempo. O sistema (1) utilizado neste modelo é uma modificação do proposto por [1], desconsiderando a dinâmica espacial de parasitas.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \gamma(S(t) + I(t)) - \lambda(P(t))S(t) - \mu S(t) \\ \dfrac{dI}{dt} = \lambda(P(t))S(t) - \mu I(t) \\ \dfrac{dP}{dt} = \beta I(t) - \theta P(t). \end{cases} \tag{1}$$

Onde, $\gamma$ e $\mu$ são as taxas de natalidade e mortalidade, respectivamente, da população de gatos; $\beta$ é taxa de parasitas eliminados ao meio ambiente por um gato infeccioso, por dia; $\theta$ é o decrescimento natural do parasita e $\lambda(P)$ medida de transmissão do parasita ao gato suscetível, logo $\lambda(P)S$ é a proporção de gatos suscetíveis que se infectam ao consumir $P(t)$ parasitas.

Para avaliar a medida de transmissão não levamos em consideração a forma infectante do parasita, desse modo, assim como em [1], utilizamos uma distribuição uniforme, dada pela a probabilidade que um gato se infecte dependendo da quantidade de parasitas ingeridos pelo hospedeiro, conforme a função (2).

$$\lambda(P) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad P(t) < P_{min} \\ \frac{P(t)-P_{min}}{P_{max}-P_{min}}, & \text{se} \quad P_{min} \leq P(t) \leq P_{max} \\ 1, & \text{se} \quad P(t) > P_{max}. \end{cases} \tag{2}$$

Para obter os resultados utilizamos o método de aproximação numérica Runge-Kutta de $4^{\underline{a}}$ ordem, considerando os parâmetros com base em [1].

Realizamos três simulações, em cada uma delas tomamos a população inicial de $S_0 = 5$ gatos suscetíveis, $I_0 = 0$ gatos infectados e $P_0 = 0,5 \times 10^6$ parasitas. Fixamos

a taxa $\beta = 0,17$ de parasitas eliminados ao meio ambiente por um gato infeccioso, por dia. Consideramos a concentração mínima de $P_{min} = 200.000$ e a concentração máxima de $P_{max} = 700.000$ parasitas ingerido pelo hospedeiro.

- **Simulação 1:** Consideramos que a população de gatos suscetíveis aumentam em relação ao tempo a uma taxa $\gamma = 0,048$; a taxa de mortalidade de gatos dada por $\mu = 0,025$ e a taxa de decaimento natural dos parasitas dada por $\theta = 0,05$.

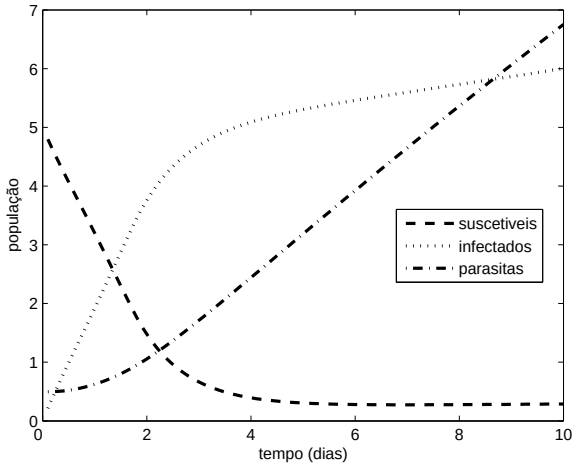


Figura 1: Evolução temporal das populações de gatos suscetíveis e infectados e de parasitas.

Podemos observar na Figura 1 que a população de parasitas começa a infectar os gatos suscetíveis que, por sua vez, contribui para o aumento da população de parasitas de $P_0 = 0,5 \times 10^6$ para aproximadamente $5 \times 10^6$ em 10 dias após o início da infecção.

Como medida de controle de crescimento do parasita, simulamos como em [1], duas abordagens: uma no controle da taxa de natalidade dos gatos (Simulação 2) e outra da taxa de decaimento do parasita (Simulação 3).

- **Simulação 2:** Nesta simulação, imitamos a aplicação de controle de natalidade dos gatos suscetíveis diminuindo sua taxa de natalidade de $\gamma = 0,048$ para $\gamma = 0,025$. Utilizando os mesmos valores para demais parâmetros obtemos os resultados ilustrados na Figura 2.

- **Simulação 3:** Para simular o controle do parasita através de produtos químicos, consideramos $\theta = 0,5$, mantemos a taxa de natalidade dos gatos em $\gamma = 0,048$ e os demais parâmetros como das simulações anteriores. Pelos gráficos da Figura 3, podemos observar que o crescimento da população de parasitas é muito pequeno quando comparado com o obtido pelo controle de natalidade dos gatos suscetíveis (Simulação 2), variando de $P_0 = 500.000$ para aproximadamente 1.912.000 nos primeiros 10 dias de infecção.

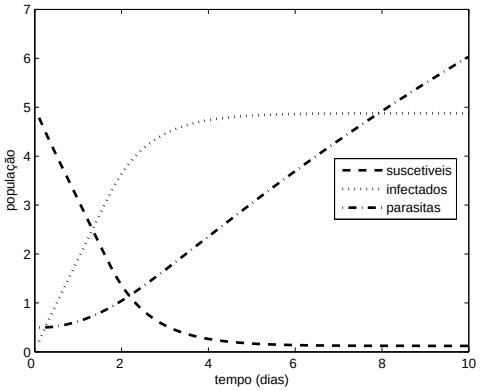


Figura 2: Resultados da Simulação 2.

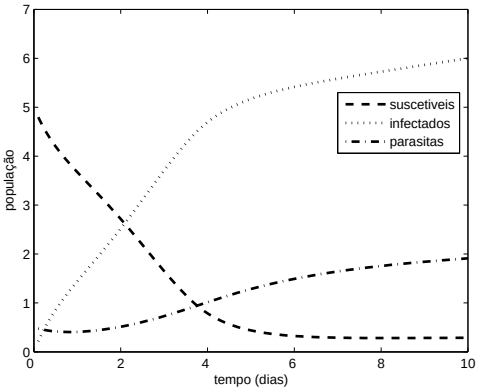


Figura 3: Resultados da Simulação 3.

Na Figura 2 verificamos um significativo decaimento na evolução temporal da população de gatos infectados, bem como na concentração de parasitas eliminados no ambiente pela população de gatos infectados pelo *Toxoplasma gondii*.

Fazendo o controle de natalidade de gatos, reduzindo-se a taxa $\gamma$ pela metade, constata-se uma população menor de gatos suscetíveis e consequentemente de gatos infectados, refletindo numa forma de controle do parasita, Figura 2. Simulando o controle na população do parasita por produtos químicos, ou seja, através do decaimento do parasita, observa-se que o crescimento do parasita é muito pequeno, Figuras 3, comprovando a eficiência do método de controle.

**Conclusões**

Apesar das simplificações realizadas no modelo, quando relacionado ao modelo de [1], as simulações revelam bons resultados, os quais descrevem a dinâmica de propagação

temporal *Toxoplasma gondii* em uma população hipotética de gatos. O modelo não considera a dispersão espacial de propagação da epidemia como faz [1], mas ainda corrobora na tomada de decisão ao realizar o controle da doença, seja pelo controle de natalidade da população de gatos suscetíveis ou pela aplicação de produtos químicos a fim de impedir o crescimento acelerado dos parasitas.

**Agradecimentos**

Aos amigos, familiares e professores que me incentivaram em busca de um futuro melhor. Agradeço em especial à professora Maristela Missio, pela paciência e perseverança na orientação e à UEMS, pela oportunidade de realização deste trabalho.

# Referências

[1] ANGEL, D.Y.T. 2004. Análisis Matemático de la Dinámica de Propagación de la Infección por *Toxoplasma gondii*. Dissertação de Mestrado apresentado junto à Universidad Del Quindío.

[2] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática, Contexto**. São Paulo, 2002.

[3] BASSANEZI, R. C. e FERREIRA JR W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo, 1988.

[4] Fundação Oswaldo Cruz - FIOCRUZ. **Modelo pioneiro usa células intestinais de felinos para estudo da toxoplasmose**. Disponível em: *http* : *//www*.fiocruz.br/ioc/cgi/ cgilua.exe/sys/start.htm?infoid= 669&*sid* = 32 (último cesso em: 27/04/2010).

[5] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo, 2003.