SISTEMAS DINÂMICOS E ENSAIOS PRÁTICOS

Pedro Flavio Silva Othechar[1], Luiz Oreste Cauz[2].

1-Bolsista de Iniciação Científica/UEMS, UEMS/Nova Andradina; pedro.galois@gmail.com.

2-Professor do Curso de Matemática/UEMS, UEMS/Dourados, cauz@uems.br.

Área Temática: Geometria e Topologia: Sistemas Dinâmicos

Resumo

O presente trabalho inicia-se pelo estudo de sistemas dinâmicos lineares. Mais precisamente, a forma geral dessa classe de sistemas, pontos de equilíbrio e a classificação desses pontos. Posteriormente é feito um estudo sobre a transformada de Laplace. Nesse estudo vemos sua definição, suas propriedades, obtenção de sua inversa e a sua aplicação da na resolução de uma equação diferencial.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Transformada de Laplace, Pêndulo Linear.

Introdução

Sistemas dinâmicos é uma área da matemática que estuda os sistemas físico-matemáticos que evoluem e alteram sua configuração com o tempo. Os sistemas dinâmicos podem ser usados para modelar entre outros, fenômenos biológicos, problemas em Astronomia, Mecânicos e Eletrônicos, para estudar dinâmicas populacionais e econômicas. Em geral, quase sempre não é possível encontrar soluções exatas para tais sistemas. Dessa forma o que se procura é uma compreensão qualitativa ou topológica destas soluções.

O objetivo deste trabalho foi fazer um estudo introdutório sobre sistemas dinâmicos visto que é uma área muito ampla dentro das Ciências Exatas, e mostrar a conexão entre Transformada de Laplace e equações diferenciais (Referências [1], [2], [3], [4] e [5]).

Material e Métodos

O material utilizado para o desenvolvimento da pesquisa foram os livros e artigos listados na Referência Bibliográfica. Além disso, foram realizados estudos dirigidos, seminários, sendo os quais foram periodicamente acompanhados pelo professor orientador.

Resultados e Discussão

Sistemas dinâmicos Lineares

Um sistema dinâmico linear pode ser apresentado na forma matricial, isto é,

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = Ax \quad x \in R^n, \tag{1.1}$$

onde A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes. Uma solução do sistema (1.1) é uma função vetorial $x(x_0, t)$ que depende do tempo t e da condição inicial

$$x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

de modo que $x(x_0, t)$ é solução de (1.1) e (1.2).

A solução do sistema linear (1.1) é simplesmente $x(x_0, t) = e^{At}x_0$, onde e^{At} é uma matriz exponencial $n \times n$. A solução geral do sistema linear é a superposição de n soluções linearmente independentes $x^j(t)$, isto é, $x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j(t)$ onde as n constates c_j são determinadas pela condição inicial. Se os autovalores $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ de A forem reais e distintos, então A tem n autovetores linearmente independente $\{v_1, ..., v_n\}$. Além disso, podemos diagonalizar A por meio de uma transformação linear. A partir do desenvolvimento em série da matriz e^{AT}, ou seja, $e^{At} = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^n}{(n)!}A^n ... \right]$ onde I é a Matriz Identidade é fácil ver que a matriz e^{AT} também será diagonal com autovalores $\{e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}\}$. Deste modo a solução de cada $x^j(t)$ será $x^j(t) = e^{\lambda_j t} vj$. No caso em que A tem autovalores complexos conjugados $\alpha_j \pm \beta_j$ e autovetores $v^{R_e} \pm iv^{I_m}$, temos as soluções

$$x^j{}_{\text{Re}} = e^{\alpha_j t}(v^{\text{Re}} \cos\beta_j t - v^{\text{Im}} sen\beta_j t) \qquad \text{e} \qquad x^j{}_{\text{Im}} = e^{\alpha_j t}(v^{\text{Re}} sen\beta_j t + v^{\text{Im}} \cos\beta_j t)$$

onde $x^j{}_{\text{Re}}$ e $x^j{}_{\text{Im}}$ são respectivamente a parte real e a parte imaginária de $x^j(t)$.

De forma simplificada escrevemos $x^j(t) = e^{\text{Re}(\lambda_j)t} e^{i\,\text{Im}(\lambda_j)} vj$. Como $e^{i\,\text{Im}(\lambda_j)} vj$ é uma função limitada, a estabilidade de $x^j(t)$ vai depender essencialmente de $R_e(\lambda_j)$. Se $R_e(\lambda_j) > 0$, $e^{\text{Re}(\lambda_j)}$ cresce continuamente com o tempo e $x^j(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Isso significa que as trajetórias $x^j(t)$ deixam a vizinhança de um ponto de equilíbrio P^*, tal que $AP^* = 0$. Inversamente, se $R_e(\lambda_j) < 0, x^j(t) \to P^*$ quando $t \to \infty$ e nesse caso o ponto P^* é estável.

Classificações dos pontos de equilíbrio

O ponto de equilíbrio de um sistema linear pode ser classificado de acordo com a topologia de seu retrato de fases e de acordo com a sua estabilidade. Essa classificação é feita em função dos autovalores da matriz $A_{n\mathrm{X}n}$ associada ao sistema.

Considere o sistema de n equações diferenciais (1.2). O polinômio característico é obtido através de $\det(A-\lambda I)=0$. Quando todos os autovalores da matriz A tiverem a parte real diferente de zero, o ponto de equilíbrio P^* correspondente é chamado de hiperbólico, independentemente do valor da parte imaginaria. Quando pelo menos um autovalor tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é denominado de não-hiperbólico.

Os pontos de equilíbrio hiperbólicos podem ser classificados de três formas quanto à estabilidade: atratores, repulsores e selas. Se todos os autovalores de A tem a parte real negativa, o ponto de equilíbrio é chamado de atrator; neste caso o equilíbrio é assintoticamente estável. Se todos os autovalores de A têm parte real positiva o ponto de equilíbrio é chamado de repulsor ou fonte. Quando alguns autovalores (mas não todos) têm a parte real positiva e o restante tem a parte real negativa, então o ponto de equilíbrio é chamado de sela.

Quando à estabilidade de pontos de equilíbrio não-hiperbólico, pode-se dizer que: um ponto de equilíbrio não-hiperbólico é instável se um ou mais autovalores de A tem a parte real positiva; Se alguns autovalores da matriz A têm a parte real negativa, enquanto que os outros autovalores têm a parte real nula, o ponto de equilíbrio é chamado de marginalmente estável; Se todos os autovalores da matriz A são imaginários puros e não-nulos, o ponto de equilíbrio é chamando de Centro.

Transformada de Laplace

Ao tentarmos resolver determinado problema, muitas vezes é conveniente, convertê-lo em outro equivalente a partir de uma determinada transformação. O novo problema é resolvido e a transformação inversa permite determinar a solução procurada do problema original. A transformada de Laplace tem exatamente esse propósito, quando se trata de determinar a solução de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes em relação à variável independente.

De maneira geral, estamos interessados em trabalhar com funções de variável real com imagem no conjunto dos complexos, isto é, $f(t):(-\infty,\infty)\rightarrow C$.

A transformada de Laplace de $f(t)$, denotada $(\hat{\mathrm{f}})$ ou $L(f)$, é uma função de variável complexa definida por $\hat{f}(s):D(\hat{f})\rightarrow C$,onde $D(\hat{f})\subset C$ é o seu domínio, C é o seu conjunto imagem e

$$\hat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \text{ ; } D(\hat{f}) := \{s \in C : \hat{f}(s) existe\}$$

Lema: Considere $f(t)$ uma função para a qual o limite $\lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau}\left|f(t)e^{-st}\right|dt$ existe e é finito. Todos os pontos do semiplano complexo $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_f)$ pertencem a $D(\hat{f})$.

Lema: considere $\hat{f}(s)$ uma função com domínio dado por $\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$. Existe $M \in R$ finito tal que $\left|\hat{f}(s)\right| \leq M, \forall s \in D(\hat{f})$.

Teorema (Linearidade): Sejam $f_1(t)$ e $f_2(t)$ duas funções que admitem transformadas $\hat{f}_1(s)$ e $\hat{f}_2(s)$ com respectivos domínios $D(\hat{f}_1)$ e $D(\hat{f}_2)$. Sejam ainda c_1 e c_2 dois escalares quaisquer. A função $f(t)$, obtida pela combinação linear das duas funções dadas, isto é, $f(t) := c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ é tal que

$$\hat{f}(s) : c_1\hat{f}_1(s) + c_2\hat{f}_2(s) \text{ e } D(\hat{f}) \supset D(\hat{f}_1) \cap D(\hat{f}_2).$$

Teorema (Escalonamento): Seja $f(t)$ uma função cuja transformada de Laplace $\hat{f}(s)$ e domínio $D(\hat{f})$ dado por $D(\hat{f}) = \{s \in C : \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$ e $\omega > 0$. A função $h(t) := f(\omega t)$ é tal que

$$\hat{h}(s) = \left(\frac{1}{\omega}\right)\hat{f}\left(\frac{s}{\omega}\right) \text{ e } D(\hat{h}) = \{s \in C : \mathrm{Re}(s) > \alpha\omega\}$$

Teorema (Diferenciação em relação ao tempo): Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$ e diferenciável em todo $t > 0$, com transformada de Laplace $\hat{f}(s)$ e domínio $D(\hat{f})$. A função derivada $h(t) := \frac{df}{dt}(t)$, $t \in (0, \infty)$, com $h(0)$ arbitrário, porém finito é tal que

$$h(s) = s\hat{f}(s) - f(0) \text{ e } D(\hat{h}) = D(s\hat{f}).$$

Agora o nosso objetivo é determinar a inversa da transformada de Laplace. Isto é, dada uma função $\hat{f}(s)$ com domínio $D(\hat{f})$, determinar uma função $f(t)$ definida para todo $t \in T$ de tal forma que $L(f(t)) = \hat{f}(s) \Rightarrow f(t) = L^{-1}(\hat{f}(s))$.

Sendo assim vem que a inversa da transformada de Laplace pode ser da pela seguinte integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma} \hat{f}(s)e^{st}ds \text{ , } t > 0$$

onde γ é qualquer linha vertical inteiramente contida no domínio de $\hat{f}(s)$.

A transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa quando empregada para a solução de equações diferenciais de diversos tipos. Em particular podemos citar as equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, algumas classes de equações diferenciais ordinárias com coeficientes variantes no tempo e equações diferenciais a derivadas parciais.

Exemplo: Agora consideremos a equação diferencial de primeira ordem $\dot{y}(t)+2y(t)=g(t)$; $y(0)=1$. Desejamos determinar sua solução com $g(t)=v(t)$ isto é a função de grau unitário. Como a equação dada deve ser verificada para todo $t \geq 0$ então, aplicando a transformada de Laplace obtemos a igualdade $s\hat{y}(s)-y(0)+2\hat{y}(s)=\frac{1}{s}$ a qual impondo-se a condição inicial $y(0)=1$ permite determinar a transformada de laplace da solução, ou seja, $\hat{y}(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}$ cuja anti-transformada fornece a solução procurada $y(t):=2e^{-2t}$, $t>0$.

Pendulo Linear, Não-amortecido, Não-forçado

Alguns sistemas físicos simples são descritos pela equação $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$, sendo ω_0>0 uma constante positiva. Essa equação, reescrita em termos de variáveis de estado, torna-se:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y \\ \frac{dy}{dt}=-\omega_0^2 x \end{cases}$$

cujos autovalores são $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$; ou seja, são complexos conjugados com parte real nula. Assim o ponto de equilíbrio $(x^*,y^*)=(0,0)$ é um centro.

A equação dada anteriormente é homogênea. Sua solução pode ser dada por: $x_h(t)=A[\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi)+\sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)]=A\cos(\omega_0 t-\varphi)$.

Agradecimentos

Agradeço o apoio financeiro da UEMS (Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul) e por proporcionar um ambiente de aprendizado como o que tenho tido, acredito que a UEMS será ainda melhor do que já é e figurará como uma universidade de ponta no cenário nacional.

Referências Bibliográficas

[1] Cauz L. O., Tsuchida M. 2004. **Análise da Estabilidade de um Sistema Mecânico Não Ideal em um Caso Crítico**, XXVII CNMAC, Porto Alegre.

[2] Cauz L. O.; Tsuchida M. 2005. **Um Estudo Numérico da Bifurcação de Hopf no Vibrador Centrífugo Não Ideal**. Anais do IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, v.4, p.107-115.

[3] Geromel, J. C.; Palhares, A. G. B. 2004. **Análise Linear de Sistemas Dinâmicos. Teoria,Ensaios Práticos e Exercícios**, Ed. Edgard Blücher Ltda.

[4] Monteiro, L. H. 2002. **Sistemas Dinâmicos**. Editora Livraria da Física.

[5] Zill, D. G. 2001. **Equações Diferenciais**, vol. 1, Editora Makron Books, São Paulo.