

CONCEITOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Daiane Iglesia Dolci¹, Luiz Oreste Cauz².

1-Bolsista de Iniciação Científica/UEMS, UEMS/Nova Andradina; daiane.i.d@hotmail.com.

2-Professor do Curso de Matemática/UEMS, UEMS/Dourados, cauz@uems.br.

Área Temática: Geometria e Topologia: Sistemas Dinâmicos

Resumo

O presente trabalho é um estudo introdutório da teoria de Sistemas Dinâmicos, visto que esta é uma área de conhecimento muito ampla dentro da Matemática e, além disso, estabelece conexões com várias áreas do conhecimento, como por exemplo, as áreas da Física, da Engenharias e da Biologia. Assumimos como ponto de partida um estudo sobre as Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem e em seguida iniciamos o estudo de Sistemas Dinâmicos passando por conceitos como espaço de estado, espaço de fase, estabilidade, critério de Routh-Hurwitz, teorema de Hartman-Grobman e bifurcação em Sistemas Dinâmicos de Tempo Contínuo.

Palavras-chave: equações diferenciais; estabilidade; pontos de equilíbrio; bifurcações.

Introdução

Todo sistema, seja da natureza ou criado pela tecnologia, é dinâmico. Pode-se dizer que não existe sistema estático, mas o que eventualmente existe é equilíbrio, e o que muitas vezes se considera um sistema estático, é na realidade um sistema dinâmico em equilíbrio. Usualmente se diferencia estática e dinâmica pelas ilustrações de movimento (dinâmico) e da fotografia (estática). A dinâmica se evidencia a partir de alguma perturbação (seja pequena ou grande) de um estado de equilíbrio, e como o sistema responde caracteriza a natureza da sua dinâmica. O presente trabalho tem por objetivo fazer um estudo sobre Sistemas Dinâmicos, tomando como ponto de partida o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem e em seguida, o estudo do Sistema Dinâmico onde conceitos como estabilidade, critérios de estabilidade e bifurcações foram abordados.

Material e Métodos

A dinâmica de trabalho foi conduzida através dos estudos dirigidos baseados no cronograma de trabalho, e de reuniões para discussão como o professor orientador. Os materiais utilizados para o desenvolvimento da pesquisa foram os livros listados na Referência Bibliográfica.

Resultados e Discussão

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's): *EDO Linear de Segunda Ordem.*

Considere a EDO linear de segunda ordem $a_2(t) \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = F(t)$.

Esta EDO não pode ser tratada por um procedimento único. Só existem métodos de solução exata para determinados coeficientes e determinadas funções de entrada. Quando não se consegue calcular, analiticamente, uma solução exata, pode-se obter uma solução analítica aproximada. Um método bastante empregado consiste em procurar por uma solução na forma de uma série de potências de t , da seguinte forma: $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$.

Outra forma de estudar a EDO acima é por meio de uma técnica de redução de ordem na qual a referida equação pode ser reduzida a um sistema de duas equações de primeira ordem. Tal sistema de equações é conhecido como sistema dinâmico bidimensional.

Sistema Dinâmico de Dimensão n .

Um sistema dinâmico de dimensão n é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tais que $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x, t)$ onde f é uma função vetorial.

O *espaço de estado* é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são os eixos $x_1, x_2, \dots, x_n$. Um estado é representado como um ponto com coordenadas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ nesse espaço. Conforme o tempo varia, esse ponto se move (ou não), sendo sua evolução temporal determinada pelas n equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

As variáveis dependentes x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), são chamadas de variáveis de estado. As funções f_j definem o campo de velocidades desse sistema, pois a velocidade instantânea é dada por, $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}$. A dimensão do espaço de fases equivale ao número de equações diferenciais de primeira ordem.

Chama-se *retrato de fases* o conjunto de curvas obtidas através da evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais nas quais as funções f_j são definidas. Sempre que o sistema não está em equilíbrio ou a entrada não é nula, o estado do sistema varia no tempo e denomina-se movimento sua evolução com relação ao eixo do tempo.

Pontos de equilíbrio são aqueles em que o sistema se apresenta invariante, o que significa todas as derivadas temporais das variáveis de estado nulas. Assim, se x^* é um ponto de equilíbrio, então $\left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x=x^*} = 0$.

Sistema Dinâmico Linear com Coeficientes Constantes: Classificação dos Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade

Considere o sistema de n equações diferenciais $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax$ onde A é uma matriz $n \times n$ e $x \in R^n$. A classificação dos pontos de equilíbrio e a análise da estabilidade desse sistema são feitas por meio dos sinais da parte real dos autovalores da matriz A . Estes autovalores são os zeros do polinômio característico que é obtido através do $\det(A - I) = 0$ onde I é matriz identidade de ordem n . Quando todos os autovalores da matriz A tiverem a parte real diferente de zero, o ponto de equilíbrio correspondente x^* é chamado hiperbólico, independente do valor da parte imaginária. Quando pelo menos um autovalor tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é denominado de não-hiperbólico. Além disso, os sinais dos autovalores irão determinar se o ponto x^* é estável, instável ou neutramente estável. Como o polinômio característico associado à matriz A é de grau n então esta análise fica comprometida quando se trabalha com um sistema de ordem n muito grande. Mas isto pode ser resolvido com a utilização de uma técnica de análise conhecida como *Crítério de Routh-Hurwitz*.

Crítério de Routh-Hurwitz

Considere um sistema dinâmico composto por n equações diferenciais de primeira ordem. O polinômio característico de grau n deste sistema tem a forma geral

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

O critério de Hurwitz garante que, se todas as raízes desse polinômio têm a parte real negativa, então os coeficientes a_j são positivos. Esta é uma condição necessária, mas não suficientes. As condições necessárias e suficientes para que todas as raízes do polinômio tenham parte real negativa são dadas pela matriz de Hurwitz, $H_{n \times n}$, onde H é a matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

O critério de Hurwitz estabelece que $Re(\lambda_j) < 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, se são todos positivos os coeficientes a_j e se são positivos os determinantes Δ_j onde

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = |H|.$$

Teorema de Hartman-Grobman

O teorema de Hartman-Grobman é uma ferramenta eficaz para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico não-linear em torno de um ponto de equilíbrio hiperbólico. Este teorema garante que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno desse ponto, de modo que o retrato de fases, na sua vizinhança, é topologicamente orbitalmente equivalente ao retrato de fases do sistema linear associado. Dois retratos de fases são orbitalmente equivalentes quando um é a visão distorcida do outro.

Bifurcações em SD de Tempo Contínuo

Bifurcação sela-nó

A bifurcação sela-nó é o mecanismo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidade contrária é criado ou destruído. Seja a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) = \mu - x^2$.

Esse sistema apresenta dois pontos de equilíbrio $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{\mu}$ se $\mu \geq 0$. Analisa-se a estabilidade desses pontos investigando-se o sinal de $\lambda = \frac{df}{dx}$ calculando em x^* . Para $x_1^* = \sqrt{\mu}$, então $\left. \frac{df}{dt} \right|_{x=x_1^*} = -2\sqrt{\mu}$, que é um numero negativo; portanto, x_1^* , é assintoticamente estável.

Para $x_2^* = -\sqrt{\mu}$, tem-se $\left. \frac{df}{dt} \right|_{x=x_2^*} = 2\sqrt{\mu}$, que é um numero positivo; ou seja, x_2^* é instável.

Bifurcação transcritical

A bifurcação transcritical faz com que a estabilidade de dois pontos de equilíbrio seja trocada para um valor crítico de um parâmetro, porém estes pontos existem para qualquer valor do parâmetro. Considere a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) = \mu x - x^2$. Esse sistema apresenta

como pontos de equilíbrio $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \mu$. Para qualquer valor de μ tem-se que $\lambda = \frac{df}{dx} = \mu - 2x$. Para $x_1^* = 0$, então $\left. \frac{df}{dt} \right|_{x=x_1^*} = \mu$. Portanto, para $\mu < 0$, a origem é assintoticamente estável e, para $\mu > 0$, instável. Para $x_2^* = \mu$, então $\left. \frac{df}{dt} \right|_{x=x_2^*} = -\mu$, o que indica que o ponto

$x_2^* = \mu$ possui sempre estabilidade contrária à da origem; pois, para $\mu < 0$, esse ponto é instável, e para $\mu > 0$, assintoticamente estável.

Bifurcação forquilha

Essa bifurcação aparece em sistemas físicos que apresentam algum tipo de simetria. Em tais sistemas, um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade pode aparecer ou desaparecer simultaneamente, quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico. Esta bifurcação é subdividida em dois tipos, supercrítica e subcrítica.

Supercrítica. Considere as equações $\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) = \mu x - x^3$. Seus pontos de equilíbrio são $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\mu}$. Note que o par $x_{2,3}^*$ só existe para $\mu > 0$. Tem-se que $\lambda = \frac{df}{dx} = \mu - 3x^2$. Para $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\mu}$, então $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{2,3}^*} = -2\mu$. Como $x_{2,3}^*$ existem somente para $\mu > 0$, esse par é assintoticamente estável. O ponto $x_1^* = 0$ é estável quando $\mu < 0$ e instável caso contrário.

Subcrítica. Considere as equações $\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) = \mu x + x^3$. Seus pontos de equilíbrio são $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-\mu}$. O ponto $x_{2,3}^*$ só existe para $\mu < 0$. Temos $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{2,3}^*} = -2\mu$. Como $x_{2,3}^*$ existem somente para $\mu < 0$, esse par é instável. O ponto $x_1^* = 0$ é estável quando $\mu < 0$ e instável caso contrário.

Agradecimentos

A presente acadêmica agradece pelo apoio financeiro concedido pela UEMS para a realização da pesquisa em nível de Iniciação Científica e pela oportunidade que a mesma lhe proporcionou, possibilitando a familiarização com a linguagem e a pesquisa matemática, além disso obteve conhecimento teórico sobre Sistema Dinâmico.

Referências

- [1] BOYCE W. E.; DIPRIMA R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro, Editora LTC, 2002.
- [2] MONTEIRO L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2002.
- [3] NOBLE, B., DANIEL, J. W. *Álgebra Linear Aplicada*. Rio de Janeiro, Ed. Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1986.